

ÍNDICE

CAA. Véase Comunicación aumentativa y alternativa (CAA).
Tarea matemática accesible, 58, 59 (tabla)
Experiencia adaptativa, 64, 65
Tipos de problemas de suma y resta, 138-139, 138 (tabla)
Pensamiento aditivo, 166
TDAH. Véase Trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH)
Alfieri, L., 67-69
Pensamiento algebraico, 224-225, 240
Matrices, 153, 164, 164 (tabla), 193
Arrowsmith-Young, B., 91
ASAN. Véase Red de Autodefensa Autista (ASAN).
Evaluación, equidad
Comprobación de accesibilidad, 232
pensamiento algebraico, 240
bloques, grupo de multiplicación, 229, 229 (figura)
Movimiento por los derechos de las personas con discapacidad, 231-232
dinámico, 231
expansión, 237-238
formativo, 234
Franco y Jeremy, 226-229
en el aula de secundaria, 232-236
propósito de, 230
respuesta de los alumnos y los profesores, 236-237
exámenes y pruebas, 235-236
Conexiones matemáticas con el UDL, 239
Tareas de patrones visuales, 235
Trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH), 13, 29, 45, 78, 212, 217
Comunicación aumentativa y alternativa (CAA), 115, 117, 247
Autismo, 103-104
ASAN, 28-29
y dislexia, 21
IEP para, 160
habilidades específicas, 47
estereotipos, 208
Red de Autodefensa Autista (ASAN), 28-29
Baroody, A. J., 69-70
Niveles básico-avanzado, porcentaje
en matemáticas, 23
en lectura, 22
Bateman, B. D., 246
Bay-Williams, J., 155, 166, 176
Benavidez, H., 15, 114-120, 125

Bilingüismo, 134, 135
Matriz de bloques, 164, 164 (tabla)
Bottge, B. A., 68
Brophy, S., 196
Brown, K., 237
Problema de las brownies, 196-200
Algoritmos defectuosos, 63, 181
Creación de aulas de pensamiento en matemáticas, grados K-12: 14 prácticas docentes para mejorar el aprendizaje (Liljedahl), 104
Caruana, V., 247
Castro, M. M., 57, 232
CCSS. Véase Estándares estatales comunes (CCSS)
CGI. Véase Instrucción guiada cognitivamente (CGI)
Choi, S., 97
Elegir ver: un marco para la equidad en el aula de matemáticas (Seda y Brown), 237
Matriz cerrada, 164, 164 (tabla)
Carga cognitiva, 133
Enseñanza guiada cognitivamente (CGI), 3, 11, 133, 135, 210 (tabla), 220
Revolución cognitiva, 67
Trabajo colaborativo (Murphy y Díaz)
Empatía, 103
Profesores de educación general, 100
IEP, 100-101
Propósito, 101-102
apoyos estratégicos, 103-106
Estándares Estatales Comunes (CCSS), 3, 37-38, 89-90, 247
Estudiantes complejos, 232
Representaciones conectadas
pensamiento algebraico, 224-225
instrucción explícita, características, 221
Importancia de, 219-221
Rutinas de instrucción, 216-219, 218 (tabla)
Kit, 212-216
pedagogía, 221
respuestas de los alumnos, 221-222
Conexiones matemáticas con el UDL, 223
Contextos para el aprendizaje de las matemáticas (Fosnot), 104
Ideas fundamentales, inversión, 88-90
aplicación, 123-124
Contar colecciones, 121-123
Desarrollo del conteo, 126
Hannah, actividad de conteo coral, 114-119
sentido numérico y valor posicional, 119-121
Conexiones matemáticas UDL, 125

Tareas de conteo, 48-50
Pandemia de COVID-19, 21, 94, 159, 160, 164
Ganancia auditiva, 30-31
Toma de decisiones, pedagógica, 57-61
Pensamiento deficitario, 26, 95-96, 134
Hechos derivados, 155, 155 (tabla), 166, 176, 176 (tabla)
Pensamiento de diseño, 97
Entrevista empática, 97-98
Puntos débiles y puntos críticos, 98
Métodos basados en dígitos, 193
DiMatteo, S., 1-12
Modelado directo, 3, 131, 138 (tabla), 166, 174-175 (tabla), 210-211 (tabla)
Discapacidad
autismo y dislexia, 21
trastorno del comportamiento, 21-22
complejo, 20
concepto de, 20 (figura)
Pandemia de COVID-19, 21
Ganancia de sordera, 30-31
individuos, 21
Luis y Pierce, 18-20
Lynn y el acceso a las matemáticas, 31-33
modelo médico de, 24-26
neurodiversidad, 28-30
importancia del problema, 22-24
raza, cultura e identidad, 21-22
modelo social, 26-27
Modelo de acceso de Vygotsky, 31
Movimiento por los derechos de las personas con discapacidad, 26, 231-232
Dolmage, J., 75
Evaluación dinámica, 231
Teoría de los sistemas de desarrollo dinámico, 77
Discalculia, 25, 32-33, 83, 85, 87
Dislexia, 39
autismo y, 21
Descripción, 25
memorización, 25-26, 42-43
pensamiento multimodal, 40-41
procesamiento fonémico, 25
resiliencia, 40
fortalezas y retos, 30, 43-45
Andamios eficaces, 70
Cuestionario «Totally Ten» para primaria, 237
Entrevistas empáticas, 95, 97-99, 103, 110-111

Empson, S. B., 3, 210 (tabla)
Enseñanza anclada mejorada, 68
Retroalimentación equitativa, 90-91
Estrategias esenciales, rutinas de enseñanza, 217, 218 (tabla)
Euler, L., 44
Everett, B., 45-46
Funcionamiento ejecutivo, 92
Estudiantes expertos, UDL Matemáticas, 79-81
Instrucción explícita, 62-63, 69, 71
Fluidez con las operaciones, multiplicación. Véase Fluidez con las operaciones de multiplicación
Flores, M. M., 194
Evaluaciones formativas, 234
Fosnot, C. T., 104, 143, 219
Sitio web Fostering Math Practices, 213
Operaciones básicas, 155, 155 (tabla), 166, 176, 176 (tabla)
Problemas de división de fracciones, 2-3
Estrategia de Amaris, 6-7, 7 (figura)
Problema de los brownies, 196-200
Estrategia de Erica, 8, 8 (figura)
Estrategia de Marty, 7-8, 8 (figura)
Comunidad matemática, 203
identidad matemática, 204-206, 205 (figura)
neurodiversidad, 206-208
pintar sillas, 5-6
pensamiento relacional, 204
estrategias de los estudiantes, 8-10, 9 (figura)
tiempo y espacio, pensamiento matemático, 201-203
tipos, 210, 210-211 (tabla)
Conexiones matemáticas UDL, 209
Imagen «¿Cuál no pertenece?», 5-6, 5 (figura)
Freudenthal, H., 149
Golan, K., 212-225, 212 (figura)
Aprendizaje por descubrimiento guiado, 68
Investigación guiada, 68-71, 105, 118, 153, 204, 235
Desarrollo estratégico guiado, 69-71, 153
Gutiérrez, R., 24
Harriss, E., 34-51, 34 (figura)
Huerta, S., 15, 121, 241-245, 241 (figura)
Hunt, J., 196
IDEA. Véase Ley de Educación para Personas con Discapacidades (IDEA)
Objetivos matemáticos del IEP
defensa, 245-246
sistemas desafiantes, 253-254

Cálculo y procedimientos, 245
ideas fundamentales, 249-251
equivalencia y ordenación fraccionaria, 256-257
memorización de hechos y procedimientos, 248
propuestas, 247, 247 (tabla)
reautorización de la IDEA, 245
SMP, 251-253
rúbrica de autoevaluación del estudiante, 252 (tabla)
Suzanne, 241-245
Conexiones matemáticas UDL, 255
comprensión de, 246-247
Imm, K., 94, 96-98, 98 (figura), 185
Programa de Educación Individualizada (IEP), 21, 60, 61, 100-101, 195. Véase también
Objetivos matemáticos del IEP
Ley de Educación para Personas con Discapacidades (IDEA), 245, 246
Innovación frente a actividades de conocimiento eficientes, objetivos de, 64-65, (tabla)
Enseñanza basada en la investigación, 63-64
Redes interconectadas de
compromiso, 81-82
representación, 82
acción estratégica, 82
Algoritmos inventados, 151
Jackson, H. G., 44
Jacob, B., 219
Johnson, N. C., 48
Kaplinsky, R., 95
Kelemanik, G., 216
Kling, G., 155, 166, 176
Variabilidad lingüística
tipos de problemas de suma y resta, 138-139, 138 (tabla)
problemas matemáticos contextuales, 133-134
Karla, problema narrativo, 127-132
estudiantes multilingües, 134-136
Conexiones matemáticas UDL, 137
Variabilidad de los alumnos, 29, 77-79
Dificultades de aprendizaje (LD), 20, 21, 25. Véase también Discapacidad; Discalculia; Dislexia
Ansiedad, 203
Contextos auténticos, 133
y discapacidades conductuales/emocionales, 22
Enseñanza anclada mejorada, 68
fracciones, pensamiento relacional, 204
estudiantes y alumnos multilingües, 216
Entorno menos restrictivo, 66
Levi, L., 3, 210 (tabla)

Lewis, K. E., 31-33
Liljedahl, P., 58
Linden, M. A., 246
Lockhart, P., 47
Lynn, D. M., 31-33
Mad Pride, 29
Martínez, K., 15, 127-139
Identidad matemática, 204-206, 205 (figura)
Dificultad de aprendizaje matemático (MLD). Véase Discalculia
Modelos matemáticos
suma y resta, 152
matrices, 153
Dina, rekenrek Cadena numérica, 140-149, 142 (tabla)
operaciones básicas y derivadas, 155, 155 (tabla)
suma de varios dígitos, estrategias para, 156, 156 (tabla)
resta de varios dígitos, estrategias para, 157 (tabla)
recta numérica, 149-152
etapas del desarrollo del modelo, 149, 150 (tabla)
Conexiones matemáticas UDL, 154
Matemáticas
colaboración y comunicación, 42
definición de, 36-37
y dislexia. Véase Dislexia
Edmund, 34-35
pensamiento multimodal, 40-41
neurodiversidad, 46-51
prácticas, 37-39
McNiff, A., 97, 180
Matemáticas significativas, 84-85
Modelo médico, discapacidad, 24-26
Memorización, 25-26, 42-43, 168-169
Mendoza, M., 180
Enfermedad mental, 29
Tarea «Miles of Tiles», 106-110
Mireles-Ríos, R., 57, 232
Morin, B., 44
Juego de mesa múltiple, 171-172
Estrategias para la suma de varios dígitos, 156, 156 (tabla)
Resta de varios dígitos, estrategias para, 157 (tabla)
Estudiantes multilingües, 134-136
Matemáticas multimodales, 86-88
Fluidez en las operaciones de multiplicación, 159-160
Pensamiento aditivo, 166
y división, 164, 165 (figura), 174, 174-175 (tabla)

Operaciones básicas y derivadas, 166, 176, 176 (tabla)
Franco y Jeremy, construcción de torres, 160-164, 162 (figura)
juegos, 170-172
neurodiversidad, 168-170
gráfico de Rachel, estrategias de los estudiantes, 167-168, 167 (figura)
etapas en, 176
Conexiones matemáticas UDL, 173
Panel Asesor Nacional de Matemáticas, 67
Neurodiversidad, 260-263
autismo según ASAN, 28-29
Dislexia, puntos fuertes, 30
Variabilidad del alumno, 29
y desarrollo matemático, 46-51

CAPÍTULO 1 CONFIANZA EN SU FORMA DE PENSAR

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Visitaremos un aula de educación especial de quinto grado en la que los alumnos participan en una investigación matemática significativa.

Ofrecer una visión general de este libro

La confianza ha sido la clave para convertirme en un profesor de matemáticas eficaz. Confío en que mis alumnos tienen la capacidad de entender las matemáticas. Confío en que llegarán a la comprensión que necesitan a su propio ritmo. Confiar en mis alumnos les ha empoderado. En mi clase, los alumnos saben que no voy a acudir al rescate a la primera señal de dificultad porque creo en sus propias capacidades. Cuando se atascan, los redirijo hacia ellos mismos: «¿Qué sabes sobre los números que te puede ayudar?». «Es difícil», me dicen. «Sí, pero lo resolverás», y al final lo hacen. Lo hacen porque, gracias a mi confianza, confían en sí mismos. Tenemos que empoderar a los alumnos para que confíen en sí mismos.



—Sussan De Matta, profesora de educación especial de quinto curso (**Figura 1.1**) •

Figura 1.1 • Sussan De Matta, profesora de educación especial de quinto grado

Comienzo este libro con esta idea, expresada por esta excepcional profesora de matemáticas, de que cuando nosotros, como profesores, confiamos en el pensamiento de nuestros alumnos, especialmente en el de nuestros alumnos con discapacidades, creamos las condiciones que nuestros alumnos necesitan para confiar en sí mismos como pensadores matemáticos. Cuando nosotros, sus profesores, creemos que nuestros alumnos pueden resolver problemas complejos y que lo harán, ellos serán capaces de hacerlo.

En mis casi 30 años de trabajo en el ámbito de la educación, primero como profesora de educación general y especial y ahora como formadora de profesores e investigadora, he visto cómo se subestima y se sobreprotege a los alumnos con discapacidades. Se conceptualiza a estos alumnos como defectuosos, como si necesitaran ser arreglados. No se confía en su pensamiento matemático. Las concepciones deficitarias de los alumnos se convierten en pedagogías deficitarias que asumen que los alumnos no pueden pensar por sí mismos. Y estos problemas se intensifican en el caso de los estudiantes con discapacidades que son negros, latinos, indígenas y/o multilingües.

Este libro está dedicado a revertir las pedagogías deficitarias y devolver la agencia matemática a todos los estudiantes con discapacidades. Las matemáticas pueden y deben ser un espacio transformador para estos estudiantes, donde puedan descubrir su poder y potencial.

En este libro, se le invitará a entrar en aulas como la de Sussan, que proporcionan a los estudiantes el espacio y el apoyo necesarios para que los estudiantes con discapacidades puedan prosperar como creadores de sentido matemático. Conoceremos a profesores que creen que todos sus alumnos son pensadores matemáticos y que diseñan las aulas para desarrollar el pensamiento de los alumnos. Destacaremos el pensamiento matemático y la brillantez de los alumnos con discapacidades. Enmarcaremos estas aulas utilizando el Diseño Universal para el Aprendizaje en Matemáticas (UDL Math), que aplica el marco teórico del UDL a la investigación en matemáticas significativas.

Antes de entrar en el aula de Sussan, ¡tienes que hacer algunos cálculos! Para apreciar la brillantez matemática de los niños, primero tienes que abordar el problema. Así que coge papel y lápiz y ponte manos a la obra. Te recomiendo que empieces, como suelen hacer los niños, dibujando.

Pruébal

Tengo 12 latas de pintura. Necesito $\frac{1}{4}$ de lata de pintura para pintar una silla. ¿Cuántas sillas puedo pintar?

¿Y si se necesitan tres cuartos de lata de pintura para pintar una silla? ¿Cuántas sillas puedo pintar con 12 latas de pintura?

¿Qué has observado sobre este problema? Sin duda, es complicado. Algunos pueden empezar dibujando botes de pintura y sillas y luego distribuyendo $\frac{1}{4}$ de cada bote de pintura a cada silla. Otros pueden encontrar una proporción y trabajar a partir de ahí. Quizás

algunos piensen: si $\frac{1}{4}$ de lata de pintura cubre 1 silla, entonces $\frac{4}{4}$ de lata de pintura cubrirán 4 sillas, y entonces podrían multiplicar 4×12 para obtener el total. Algunos podrían haber sumado o contado de dos en dos los $\frac{1}{4}$ hasta llegar a 48. En ese caso, es posible que hayas visto esta situación como

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 48$$

O tal vez como $12 \div \frac{1}{4} = 48$, pensando en cuántos grupos de $\frac{1}{4}$ caben en 12. Aunque se trata de un problema de división de fracciones, a menudo esto no resulta obvio inicialmente ni para los niños ni para los adultos. Las dos primeras estrategias que he descrito utilizan la multiplicación para averiguar cuántos grupos de $\frac{1}{4}$ hay. Para un problema como este, que Susan Empson y Linda Levi (2011) denominan «problema de grupos múltiples (división)», los niños suelen dibujarlo para comprender las relaciones que intervienen. No me avergüenza decir que yo hago lo mismo cuando multiplico o divido fracciones. Siempre necesito ver la situación en un modelo antes de comprender exactamente lo que está sucediendo. En este sentido, soy como la mayoría de los estudiantes, que comienzan con el modelado directo, un término de la instrucción guiada cognitivamente (CGI, Carpenter et al., 2015) que simplemente significa que un estudiante elige representar cada elemento de un problema para resolverlo, ya sea con manipulativos o mediante dibujos.

Este tipo de problema de división de fracciones se incluye en el quinto grado en los Estándares Estatales Comunes (CCSS; Centro de Mejores Prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores y Consejo de Directores de Escuelas Estatales, 2010): se pide a los estudiantes que resuelvan problemas de división de fracciones del mundo real como el de este caso, un número entero dividido por una fracción unitaria ($12 \div \frac{1}{4}$). Los estándares establecen la expectativa de que los estudiantes comiencen utilizando modelos visuales para resolver estos problemas, basándose en sus conocimientos tanto de fracciones como de la relación entre la multiplicación y la división. Como veremos, Sussan ofreció a sus estudiantes de educación especial la opción de resolver con $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$, la primera opción cumple con los estándares del nivel de grado y la segunda opción numérica (una fracción común con un número distinto de 1 en el numerador) los supera.

CLASE DE EDUCACIÓN ESPECIAL DE QUINTO GRADO DE SUSSAN

Sussan impartía una clase de educación especial de quinto grado, en la que todos los alumnos recibían servicios de educación especial. Los alumnos de la clase de Sussan tenían planes de educación individualizados (IEP) por dificultades de aprendizaje o autismo, y varios de ellos también recibían servicios de logopedia. Sus alumnos eran principalmente latinos y varios de ellos eran multilingües. Ella imparte todas las materias a los alumnos, que entran y salen del aula, ya que algunos asisten a clases de educación general para determinadas materias.

A través de múltiples conversaciones con Sussan, aprendí que su objetivo final en la enseñanza de las matemáticas es que sus alumnos se vean a sí mismos como buenos estudiantes de matemáticas, que sean capaces de resolver problemas y perseverar, que participen en debates matemáticos y que razonen cuantitativamente. Partiendo de los estándares de su nivel, diseña su plan de estudios de manera flexible basándose en lo que sus alumnos piensan y hacen en cada momento, utilizando su trabajo de desarrollo

profesional en CGI con su distrito para ayudarla a observar y aprovechar el pensamiento de los alumnos. En todo momento, se centra en ayudar a sus alumnos a convertirse en estudiantes estratégicos.

VISITÉ SU CLASE con un grupo de educadores especiales de su distrito que estaban interesados en enseñar matemáticas a través de la resolución de problemas. Sussan comenzó con un calentamiento en el que mostró cuatro imágenes de fracciones y preguntó a los alumnos: «¿Cuál no pertenece?». (Las encontró en el sitio web Fraction Talks [<https://bit.ly/3EVJJG6>]). Empezó dando un poco de tiempo para que pensarán de forma independiente; luego, los alumnos hablaron por parejas sobre lo que habían observado; y, a continuación, lo compartieron con todo el grupo. Anotó la imagen utilizando una tableta conectada al proyector del aula. Añadió tanto las palabras que utilizaron los alumnos como la forma en que nombraron las fracciones (**Figura 1.2**).

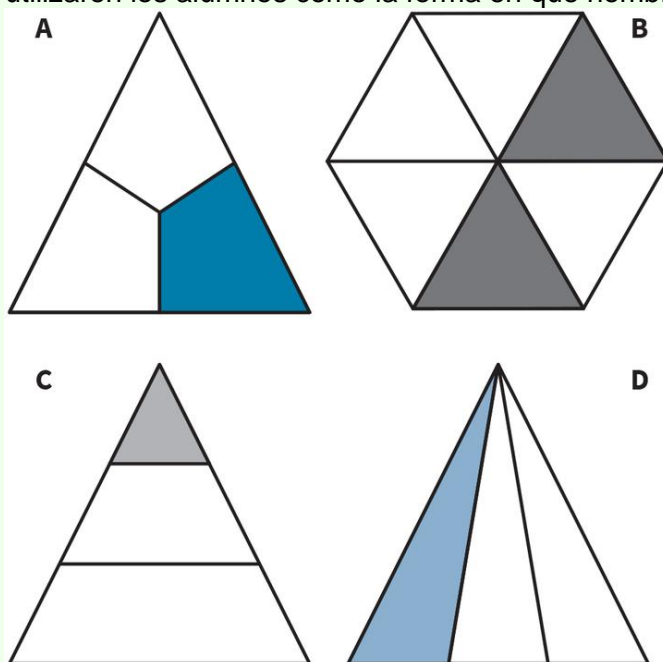


Figura 1.2 • Imagen de «¿Cuál no pertenece?».

FUENTE: Reproducido con permiso de Nat Bantling en FractionTalks.com. Imagen creada por Denise Gaskins.

Pruébalo

¿Cuál no pertenece? ¿Por qué? ¿Puedes argumentar por cada forma de **la Figura 1.2**?

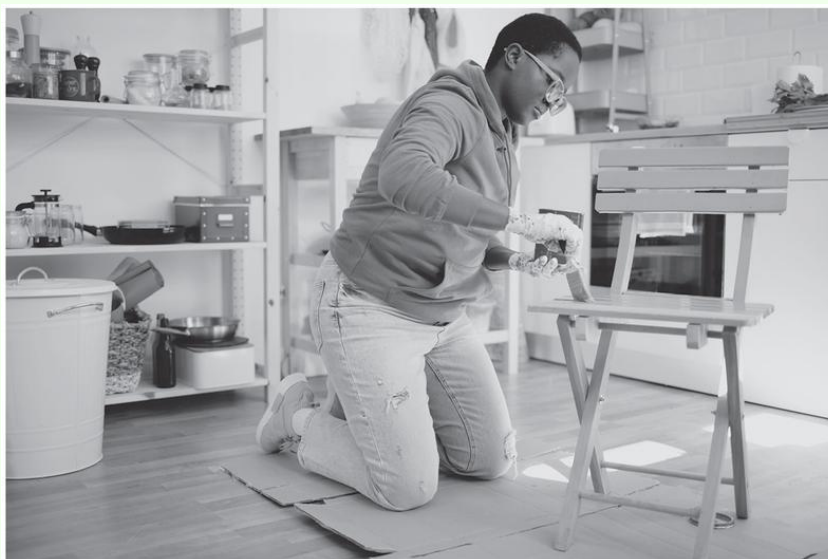
El debate sobre esta imagen fue breve, no duró más de 7 minutos, pero fue una forma estupenda de prepararse para un problema de fracciones más largo. Un alumno propuso la imagen superior derecha de un hexágono (B) como la que no encajaba, ya que era una fracción diferente, $2/6$ frente a $1/3$. Otros alumnos no estuvieron de acuerdo y argumentaron que, dado que esas fracciones eran equivalentes, ¡esta sí encajaba! Cuando un alumno propuso que el triángulo inferior izquierdo (C) no encajaba, los demás asintieron. Era la única fracción que no era igual a $1/3$. Un alumno argumentó que no era una fracción en absoluto porque era «desigual». Sussan diseñó este debate como calentamiento y como oportunidad para utilizar vocabulario relacionado con las fracciones (equivalencia, partes iguales). Me di cuenta de que estos alumnos tenían un buen dominio

de los fundamentos de la equivalencia fraccionaria.

A continuación, Sussan pasó al problema de la historia, que era el tema principal de la clase. Comenzó presentando a los alumnos el contexto de pintar sillas, mostrando un divertido GIF sobre pintura. Preguntó a los alumnos qué sabían sobre pintar en casa. Hizo gestos como si pintara una silla mientras mostraba varias imágenes de sillas pintadas y botes de pintura. Los alumnos hablaron por parejas sobre lo que sabían acerca de pintar. Cuando se aseguró de que todos comprendían el contexto de pintar muebles con latas de pintura, presentó el problema de las 12 sillas. Mostró la siguiente diapositiva y leyó el texto en voz alta dos veces. Manteniendo constante el número de 12 sillas, dio dos opciones numéricas: $\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$ de lata de pintura para cada silla.

Vuestros padres os han pedido que les ayudéis a pintar unas sillas. Tenéis 12 botes de pintura. Si necesitáis _____ botes de pintura para pintar una silla, ¿cuántas sillas podéis pintar?

[$\frac{1}{4}$ o $\frac{3}{4}$]



FUENTE: [istock.com/anchiy](https://www.istock.com/anchiy)

Mientras los alumnos se ponían a trabajar, dispersándose por el aula entre los pupitres o tumbándose en la alfombra, Sussan y sus dos auxiliares docentes les ayudaban. Uno de los auxiliares ayudó a un alumno que quería utilizar manipulativos. Esto me atrajo hacia allí para observar, ya que siempre me fascina/asusta ver a los niños utilizar manipulativos para resolver problemas de fracciones. Tómese un momento y piense en cómo podría utilizar las reglas Cuisenaire para resolver este problema. ¿Confuso? Sí. El uso de manipulativos significa que los niños deben asignar un valor fraccionario a una pieza y luego dar sentido al problema, creando casi otra capa a su pensamiento proporcional. Me di cuenta de que el asistente no disuadió al alumno, que contó 12 regletas, las miró, miró su papel y luego cambió de opinión y dibujó el problema. Otra asistente estaba ayudando a una alumna que le pidió que escribiera por ella. Mientras la alumna explicaba verbalmente su estrategia, la asistente anotaba sus palabras.

Me fascinó observar a una niña, a la que llamaremos Amaris, que dibujó 12 cajas, que representaban los botes de pintura. Las dividió en cuartos y luego pareció quedarse atascada. Después de mirar el papel durante un momento, empezó a dibujar sillas (en **la figura 1.3** se puede ver una reconstrucción de su trabajo). Dibujó meticulosamente cada

silla y la conectó a un cuarto de lata de pintura. Finalmente, dibujó las 48 sillas necesarias para su elección numérica. Fue impresionante verla. Miré a mi alrededor y vi a otros cuatro profesores reunidos, todos nosotros aparentemente hipnotizados por su trabajo (Figura 1.3).

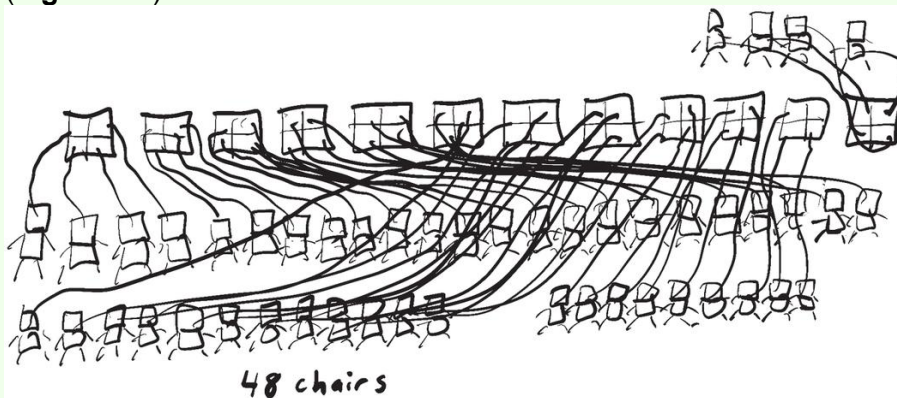


Figura 1.3 • Estrategia de Amaris para 12 sillas y un cuarto de lata de pintura

Más tarde, le pregunté a Sussan si Amaris hacía este tipo de modelado siempre. Sussan me dijo que en las clases anteriores de Amaris no se le había permitido resolver problemas por su cuenta, por lo que le había llevado unos meses sentirse cómoda entendiendo un problema. Al principio del año, le pedía a Sussan que le dijera cómo resolver cada problema. Una y otra vez, Sussan la animaba a dibujarlo o a utilizar manipulativos. Tanto la profesora como la alumna necesitaron tiempo y mucha paciencia, pero Amaris estaba aprendiendo a modelar directamente a través del dibujo. Le costó tiempo confiar en sí misma, y fue un honor para nosotros ver cómo empezaba a creer que podía resolverlo por sí misma.

Sussan caminaba por el aula, observando a los alumnos en silencio desde una pequeña distancia. A veces, se agachaba junto a un niño y le hacía algunas preguntas sobre lo que estaba pensando. Su presencia transmitía un apoyo muy silencioso, la sensación de que creía que estos alumnos podían resolver este complejo problema.

Aunque la mayoría de los niños de la clase eligieron $1/4$, un niño, Marty, eligió inmediatamente $3/4$ como su número. Lo resolvió dibujando las latas de pintura, dividiéndolas en cuartos y agrupando las partes fraccionarias en $3/4$ (Figura 1.4).

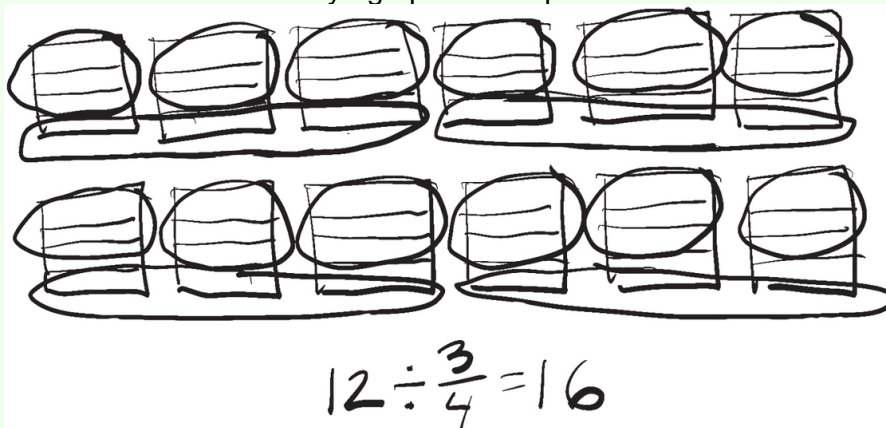


Figura 1.4 • Estrategia de Marty para 12 sillas y $3/4$ de lata de pintura

Me di cuenta de que Marty escribió inmediatamente una ecuación para describir el problema, identificándolo correctamente como una división.

Otra alumna, Erica, eligió $\frac{1}{4}$. Dividió un bote de pintura y descubrió que un bote de pintura daba para cuatro sillas. A continuación, contó de cuatro en cuatro 12 veces para obtener la respuesta (**Figura 1.5**).

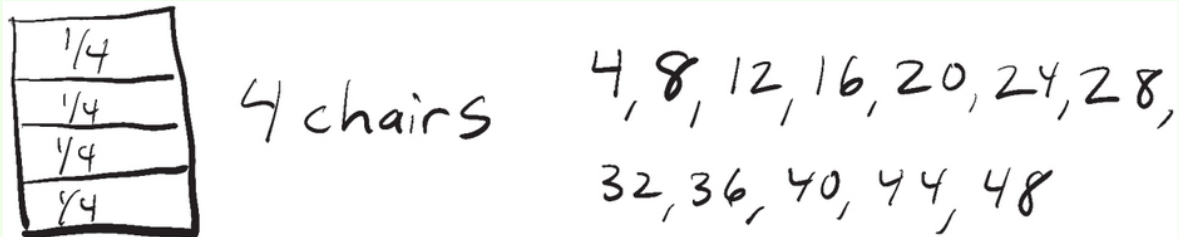


Figura 1.5 • Estrategia de Erica para 12 sillas y $\frac{1}{4}$ de lata de pintura

Cuando la clase se reunió en la alfombra para compartir, Sussan se unió al círculo con el brazo en una férula. Primero pidió a todos los alumnos que se giraran y hablaran, explicando su estrategia a un compañero. Ella escuchó estas conversaciones. Después, Susan pidió a Marty que compartiera su estrategia. Mientras él hablaba, ella reescribió su estrategia en su tableta, que se proyectó en una pantalla situada al frente del aula. Él lo hizo con confianza, compartiendo su razonamiento sin apenas ayuda por parte de su profesora. Después de que él compartiera su proceso una vez, ella le pidió que lo explicara de nuevo, deteniéndose en varios puntos para que los alumnos se giraran y hablaran sobre lo que él había hecho. A continuación, pidió a Erica que compartiera. Una vez más, la alumna compartió todo el proceso y luego lo repitió más lentamente, dejando tiempo para que los alumnos lo reformularan a sus compañeros. Al final del debate, Sussan resumió las estrategias matemáticas utilizadas por los alumnos. Les pidió que levantaran la mano para indicar qué estrategia habían utilizado. Sussan les recordaría estas estrategias al día siguiente, cuando abordararan un problema similar (**Figura 1.6**).



Figura 1.6 • Sussan escucha mientras sus alumnos comparten sus estrategias

Me di cuenta de que Sussan no solo se dedicaba a enseñar matemáticas a sus alumnos, sino también a desarrollar su propia metacognición, lo que incluía comprender y regular su respuesta emocional. Por ejemplo, escuchó a un niño, Johan, mientras compartía su pensamiento con su compañero. Mientras Johan compartía, seguía contando el número de veces que se había compartido, perdiendo la cuenta varias veces. Miró a Sussan, claramente frustrado y sin estar seguro de su respuesta. Sussan dijo: «Parece que ahora estás revisando tu razonamiento. ¿Qué te ayudaría a estar más seguro de tu respuesta?». El alumno pensó y luego dijo: «Volver a contar yo mismo». Sussan asintió con la cabeza, y el alumno se levantó, fue al fondo del aula y comenzó a volver a contar por sí mismo. Cuando regresó con su compañero, ya estaba seguro de su respuesta. También había practicado observar su propia respuesta emocional y encontrar una manera de estar seguro emocional y matemáticamente de su respuesta. Vi este tipo de

coaching estratégico varias veces durante mis visitas al aula de Sussan.

Me di cuenta de que algunos de los alumnos de Sussan tenían diferentes formas de comunicar su pensamiento. Aunque la mayoría de los alumnos estaban sentados en la alfombra durante la presentación y el intercambio, un alumno, al que llamaremos Francisco, estaba sentado en su propia mesa, con una tableta en la mano. Parecía estar concentrado en esa tableta durante la discusión, pero de vez en cuando gritaba comentarios relacionados con el problema sin levantar la mano. Muchos profesores habrían considerado su comportamiento inapropiado. Para Sussan, su forma diferente de participar no parecía ser un problema. No le prestó atención, pero a veces ignoraba sus comentarios y otras veces los incorporaba al debate, repitiendo lo que él decía.

Cuando hicimos el resumen, la antigua profesora de educación especial de Francisco, que estaba observando conmigo, quedó impresionada por la participación de este niño, una mejora espectacular con respecto a cuando estaba en su clase. Según ella, Francisco no había participado anteriormente en ninguna actividad matemática que no fuera individual con un asistente educativo. Francisco resolvió el problema y participó de forma constante. Su participación simplemente era diferente a la de los demás niños. Y, si se veía en el contexto de su desarrollo como individuo, ¡era algo que sin duda había que celebrar! ●

PEDAGOGÍA MATEMÁTICA DE LA CONFIANZA

Algunos profesores de quinto curso se habrían resistido a plantear un problema tan difícil a sus alumnos. En particular, a algunos profesores les habría preocupado plantearlo a alumnos con discapacidades. Se habrían preguntado si el problema tenía demasiado lenguaje, lo que confundiría a los alumnos. Algunos profesores habrían enseñado previamente a los alumnos un procedimiento específico para resolverlo. O les habrían guiado paso a paso a través del problema. Imaginemos por un momento cómo habría sido diferente esta lección si se hubiera pedido a los alumnos que utilizaran un procedimiento para dividir fracciones. Recuerdo haber aprendido la frase «No nos preguntemos por qué, solo invertimos y multiplicamos», junto con el procedimiento. En este caso, para $3/4$, se enseñaría a los alumnos a hacer lo siguiente:

$$12 + 3/4 = 12 \times 4/3 = 48/3 = 16$$

¿Este procedimiento coincide con la forma de pensar de estos alumnos? Obligar a los alumnos a utilizar este procedimiento concreto, que muchos alumnos (y adultos) no entienden, acabaría con el hermoso pensamiento proporcional y relacional que surgió de este problema de forma bastante natural. Sussan cree que lo primero es dar sentido a las cosas. Confía en el pensamiento de sus alumnos. Sabía que podían resolver este problema utilizando su intuición matemática y lo que ya sabían sobre fracciones.

Sussan utiliza los problemas narrativos como una rutina casi diaria (Carpenter et al., 2015). Elige un problema diseñado para ayudar a los alumnos a explorar matemáticas importantes de su nivel, como por ejemplo, cómo modelar y comprender la división de fracciones. Durante varios días seguidos, les plantea problemas narrativos cada vez más complejos. Para obtener más información sobre los problemas narrativos diseñados para desarrollar

una comprensión profunda de las fracciones, consulte «Desentrañar una idea fundamental: desarrollar la comprensión de las fracciones a través de problemas narrativos» (p. 210).

Esta rutina tiene una estructura coherente que ayuda a los alumnos a comprender y cumplir las expectativas de comportamiento (**Tabla 1.1**).

Problemas narrativos	Los profesores son:	Los alumnos son:
Inicio	Presentan el problema narrativo de una manera atractiva y comprensible utilizando elementos visuales y la narración de historias.	Escuchar y reformular aspectos de la situación de la historia.
Tiempo de trabajo	Reunirse con los alumnos según sea necesario para apoyar su razonamiento y recopilar información para compartir.	Resolver los problemas utilizando los métodos que elijan y hablar con sus compañeros sobre sus soluciones.
Compartir	Dirigir una puesta en común, que concluya con la consolidación de conceptos y/o estrategias de los alumnos.	Compartir (2-3 alumnos) su razonamiento, ya sea reescribiendo su propia solución o pidiendo al profesor que lo haga.

Para obtener más información sobre cómo facilitar los problemas narrativos, consulte las Guías de prácticas docentes sobre problemas narrativos de CGI en línea, así como los capítulos 8 y 12.



Guía de prácticas docentes en línea grs.ly/l7f7rwq

Para leer un código QR, debe tener un teléfono inteligente o una tableta con cámara. Le recomendamos que descargue una aplicación de lectura de códigos QR específica para la marca de su teléfono o tableta.

El aula de Sussan es un poderoso contraargumento a los mitos deficitarios que circulan sobre el potencial matemático de los estudiantes con discapacidades. A veces escucho a educadores (e investigadores) decir que los estudiantes con discapacidades no pueden

«manejar» la enseñanza basada en la investigación, que estos estudiantes no son capaces de desarrollar sus propias estrategias y que se les debe decir cómo pensar.

Esto me lleva a la que quizá sea la idea más importante de este libro. Creo firmemente que los estudiantes con discapacidades tienen un rendimiento inferior en matemáticas, en parte porque no confiamos en su forma de pensar. De hecho, hemos creado mitos sobre las capacidades matemáticas de los estudiantes con discapacidades. Escribo sobre cómo han surgido estos mitos y sobre cómo hemos creado sistemas que los perpetúan. Lo contrario del pensamiento deficitario es confiar en la forma de pensar de nuestros estudiantes.

Creo firmemente que los estudiantes con discapacidades tienen un rendimiento inferior en matemáticas, en parte porque no confiamos en su forma de pensar.

La confianza se transmite a través de la elección del problema, la elección de cómo resolverlo y el tiempo que Susan les da para pensar. Cada vez que estoy en el aula de Susan, me sorprende su silencio, su tiempo de espera. Cuando hace una pregunta, espera. Cuando un estudiante está pensando qué decir, y claramente necesita un minuto más para formular sus pensamientos, ella espera. No hay nerviosismo en su espera, ni sensación de que esté ansiosa por seguir adelante. Me gustaría mucho tener esta cualidad como profesora y como madre. Muchos de sus alumnos tienen diferencias en el procesamiento del lenguaje, por lo que pueden tardar más tiempo en pensar en una estrategia o en procesar lo que ella u otro alumno ha dicho. Su espera, paciente, sin prisas, amable, era el ingrediente secreto del excepcional compromiso de sus alumnos en su clase.

ESTE LIBRO

Este libro ofrece una visión de cómo podemos diseñar nuestras aulas de matemáticas para que se conviertan en espacios en los que los alumnos con discapacidades prosperen como pensadores matemáticos, espacios que también sean más flexibles, más solidarios y más acogedores para todos nuestros alumnos. Cuando diseñamos desde los márgenes, podemos transformar nuestras aulas y nuestras escuelas. Una idea clave de este libro es que lo que los alumnos con discapacidades necesitan para tener éxito en matemáticas no es cualitativamente diferente de lo que necesitan todos los niños. No es que los alumnos (sin discapacidades) aprendan todos de una manera y los alumnos con discapacidades aprendan todos de otra. En cambio, TODOS los alumnos son variables. A algunos alumnos, con y sin discapacidades, les cuesta mucho prestar atención en las clases. De hecho, eso describe a una amplia franja de la población. Las personas con más dificultades para prestar atención pueden identificarse como personas con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH). Dado que las diferencias en la atención se dan en todas las personas, adaptar las aulas para que funcionen para los estudiantes con TDAH no solo ayudará a esos estudiantes, sino a todos nosotros. Esta es una idea clave del Diseño Universal para el Aprendizaje (UDL; Meyer et al., 2014), que exploramos a lo largo del libro.

Una idea clave de este libro es que lo que los estudiantes con discapacidades necesitan para tener éxito en matemáticas no es cualitativamente diferente de lo que necesitan todos los niños.

La primera gran idea del libro es **que importa cómo pensamos sobre la discapacidad**. Importa porque los niños asimilan la forma en que los enmarcamos, e importa porque si los educadores piensan que los estudiantes con discapacidades no pueden hacer algo, no les darán oportunidades para intentarlo. En el capítulo 2, exploraremos diferentes modelos para comprender la discapacidad, como el modelo médico, el modelo social y la neurodiversidad. También exploraremos la variabilidad del alumno, el modelo para comprender a los alumnos utilizado en el UDL. Replantear a los estudiantes con discapacidades desde modelos de déficit a modelos de activos es una condición previa necesaria para confiar en su pensamiento.

A continuación, exploramos **la importancia de cómo pensamos sobre el objetivo de las matemáticas en sí**. Las matemáticas no son solo memorizar. No debemos hacer que los niños esperen a divertirse con las matemáticas hasta que hayan soportado las matemáticas escolares. Las matemáticas son y pueden ser alegres, creativas y significativas. El capítulo 3 explora estas ideas a través de un estudio con matemáticos disléxicos.

El pensamiento deficitario sobre los niños conduce a pedagogías deficitarias, lo que se explora en el capítulo 4. Este capítulo explora las diferencias entre la investigación y la instrucción explícita, por qué se recomienda tan a menudo la instrucción explícita para los estudiantes con discapacidades y cómo tomar decisiones informadas sobre la pedagogía. Vamos más allá de ver estas dos pedagogías como binarias y, en su lugar, pensamos en cómo los grandes profesores combinan elementos de ambas utilizando como ejemplo a un profesor de matemáticas de secundaria llamado Sr. Jay.

La siguiente sección del libro ofrece una exploración en profundidad de las matemáticas UDL (Lambert, 2021). Desde hace mucho tiempo me encanta el UDL, que es un enfoque basado en la investigación para comprender las aulas y la pedagogía, fundamentado en las ciencias del aprendizaje y la neurociencia (Meyer et al., 2014). Las matemáticas UDL son mi versión del UDL, basada en la investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, así como en la opinión de los estudiantes. La idea principal de estos capítulos es que **podemos diseñar aulas de matemáticas que se adapten a la variabilidad diseñándolas desde los márgenes**. Las aulas de matemáticas centradas en la creación de significado pueden ser flexibles, multimodales y pueden apoyar el desarrollo estratégico. El capítulo 5 es una introducción al UDL Math, que incluye una historia del diseño universal. El capítulo 6 sigue a dos maestras de educación infantil, la Sra. Díaz y la Sra. Murphy, mientras rediseñan el trabajo en grupo en el aula inclusiva de segundo grado de la Sra. Díaz. Utilizan un proceso sencillo que se describe en tres gestos con las manos (Tabla 1.2).

 <p>La clase de matemáticas es demasiado angosta</p>	<p>Algunas aulas de matemáticas son estrechas, con formas tan rígidas de participación que solo unos pocos alumnos tienen éxito. La clave para comprender las barreras es pedir a los alumnos su opinión.</p>
 <p>Abre la clase</p>	<p>Una vez que encontramos las barreras, abrimos el aula para permitir que más alumnos participen y aprendan. Abrir un aula significa ofrecer más opciones y flexibilidad, con más autonomía para los alumnos.</p>
<p>Entrega apoyo estratégico</p> 	<p>Algunos alumnos seguirán necesitando más apoyo incluso después de abrir el aula. Proporcionar apoyo estratégico significa encontrar formas de ayudar a los alumnos a participar y aprender.</p>

La última sección del libro es una serie de historias de aula. Conocemos a profesores que se dedican a rediseñar algunos aspectos de su práctica para atender mejor a los alumnos discapacitados y/o neurodiversos. Estos capítulos están ordenados según el contenido matemático en el que trabajan los profesores, de modo que, como lector, se empieza con niños que aprenden a contar y se termina con alumnos que aprenden álgebra y fracciones. A lo largo del libro, visitamos aulas inclusivas, en las que el profesor es un profesor de educación general, así como aulas de educación especial, en las que el profesor es un profesor de educación especial. Los profesores son un grupo talentoso y diverso, que incluye a profesores que se identifican como neurodiversos o discapacitados.

En el capítulo 7, exploramos cómo invertir tiempo en ideas fundamentales. Vemos el poder de la participación repetida en una rutina como «Contar colecciones», que ayuda a los estudiantes a desarrollar ideas fundamentales sobre los números en un aula de educación especial de K-1 impartida por Hannah Benavidez. La maestra de educación especial Kayla Martínez muestra cómo involucrar a una clase de educación especial (K-3) en problemas de

historias, al tiempo que apoya a los estudiantes con dificultades de procesamiento del lenguaje (capítulo 8). Dina Williams, que imparte clases en un aula inclusiva de segundo grado, participa en una secuencia cuidadosamente diseñada para desarrollar la comprensión de sus alumnos sobre la recta numérica abierta y la suma de varios dígitos (capítulo 9).

Los dos capítulos siguientes tratan sobre el desarrollo de la comprensión de la multiplicación y la división por parte de los alumnos, y ambos provienen de mi propia investigación sobre la intervención agencial en el pensamiento multiplicativo. En el capítulo 10, exploro mi experiencia en el diseño de una intervención de multiplicación para dos niños de cuarto y quinto grado, centrándome en la fluidez matemática. El capítulo 11 cuenta la historia de Yola, una investigadora universitaria que encuentra una forma de aumentar la participación y la comprensión de Inez, una niña de cuarto grado, en una rutina de cadenas numéricas.

En el capítulo 12, entramos en el aula inclusiva de quinto grado de la Sra. Rey para aprender cómo crea un entorno que apoya a los alumnos neurodiversos, así como su uso de problemas de fracciones de reparto equitativo. En el capítulo 13, seguimos a Kit Golan y su clase mientras nos guían a través de una rutina de instrucción de conexión de representaciones (Kelemanik et al., 2016) en la que los alumnos conectan líneas numéricas dobles con expresiones algebraicas.

Los dos últimos capítulos se refieren a la evaluación. En el capítulo 14, volvemos al aula del Sr. Jay para seguir sus experimentos de evaluación y calificación en sus aulas de séptimo y octavo grado. Por último, en el capítulo 15, seguimos a la educadora especial Suzanne Huerta mientras replantea los objetivos del Programa de Educación Individualizada (IEP) en matemáticas para sus alumnos de quinto grado.

A medida que lea, es posible que desee obtener más información sobre el contenido matemático del capítulo. Cada capítulo dedicado al aula (capítulos 7-15) termina con una sección sobre el contenido matemático. Si desea obtener más información sobre una práctica docente concreta, como «¿Cuál no pertenece?» o «Problemas narrativos», he creado unas guías de prácticas docentes en mi sitio web (mathematizing4all.com) que incluyen enlaces a recursos. También en mi sitio web puede encontrar mis artículos de investigación en formato de acceso abierto.



mathematizing4all.com

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Cuáles han sido sus experiencias enseñando a alumnos con discapacidades o siendo un alumno discapacitado que aprende matemáticas? ¿Qué le llevó a leer este libro?
2. ¿Qué observaste y qué te preguntaste sobre la clase de Sussan al resolver el problema de las 12 sillas? ¿Qué preguntas te gustaría hacerle a ella o a los alumnos?
3. ¿Qué te preguntas sobre la resolución de problemas con historias en tu clase?
4. ¿Qué preguntas tienes sobre la enseñanza de las matemáticas a alumnos con discapacidad que esperas que responda en este libro?

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 1.2 • Imagen «¿Cuál no pertenece?»

La pregunta de evaluación presenta la siguiente pregunta: ¿Cuál no pertenece? ¿Por qué? ¿Puedes argumentar por cada forma?

Las 4 formas se presentan de la siguiente manera.

Forma A. Un triángulo equilátero. El triángulo está dividido en tres secciones iguales. Una de las secciones está sombreada.

Forma B. Un hexágono. El hexágono está dividido en seis formas iguales. Dos de las secciones están sombreadas.

Forma C. Un triángulo equilátero. El triángulo está dividido en tres secciones horizontales de igual profundidad. La sección superior, que incluye la punta del triángulo, está sombreada.

Forma D. Un triángulo equilátero. El triángulo está dividido en tres secciones verticales iguales. Una de las secciones está sombreada.

Figura 1.3 • Estrategia de Amaris para 12 sillas y 1/4 de lata de pintura

Amaris ha dibujado 12 latas de pintura, representadas como 12 cajas. Cada caja está dividida en 4 cuartos. Ha dibujado 48 sillas. Una línea va desde cada cuarto de la lata de pintura hasta una de las sillas.

Figura 1.4 • Estrategia de Marty para 12 sillas y tres cuartos de lata de pintura

Marty ha dibujado 12 latas de pintura, representadas como 12 rectángulos. Cada rectángulo está dividido en 4 cuartos. Ha marcado con un círculo 3 secciones de cada caja para representar 3 cuartos. Las secciones restantes de 3 cajas están marcadas con un círculo para crear otros 3 cuartos. Hay 16 conjuntos de 3 cuartos. La ecuación 12 dividido por 3 cuartos es igual a 16.

Figura 1.5 • Estrategia de Erica para 12 sillas y 1/4 de lata de pintura

Erica ha dibujado un único rectángulo dividido en 4 cuartos. Cada cuadrante está marcado como un cuarto. Ha escrito que los cuadrantes representan 4 sillas. Junto a la representación de los rectángulos está escrito el resultado de contar de 4 en 4 12 veces.

Comienza en 4 y llega hasta 48, dando la siguiente lista de números: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48.

CAPÍTULO 2 REPENSAR LA DISCAPACIDAD

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Conoceremos a Luis y a sus profesores

Exploraremos por qué es importante cómo pensamos sobre la discapacidad

Investigar las múltiples formas en que se enmarca la discapacidad y por qué es importante en matemáticas

Aprender desde una perspectiva interna sobre la discalculia

CONOCÍ A LUIS en su clase de matemáticas de sexto grado, impartida conjuntamente por el Sr. Pierce, su profesor de matemáticas, y la Sra. Scott, su profesora de educación especial. Observé cómo Luis entraba en el aula, en la que había aproximadamente 24 alumnos, cogía una silla y un pupitre y los alejaba de los demás alumnos. Cuando comenzó la clase, lo vi trabajando con ahínco en un difícil problema matemático, con la cabeza inclinada sobre su trabajo. Después de unos 20 minutos, levantó la vista y llamó la atención de la Sra. Scott, que se acercó inmediatamente. Los dos pasaron los siguientes 30 minutos enfrascados en una conversación sobre su estrategia única para sumar fracciones. Luis estaba explorando lo que significaba compartir numeradores y denominadores y si la respuesta tenía la misma proporción.

El Sr. Pierce pidió atención a la clase para discutir las respuestas. No hubo discusión sobre las estrategias de los alumnos, solo alumnos que ofrecían respuestas para cada problema. Los mismos pocos alumnos levantaban la mano, y todas sus respuestas eran correctas. La Sra. Scott intervino y preguntó si Luis podía compartir su estrategia para sumar fracciones. Luis se acercó a la pizarra y mostró cómo intentaba compartir los numeradores de fracciones con denominadores diferentes. Fue una explicación larga y parecía que el Sr. Pierce no sabía muy bien cómo responder. La estrategia de Luis aún no funcionaba. Además, no tenía nada que ver con la estrategia del denominador común que el Sr. Pierce había mostrado al principio de la clase. Sin embargo, Luis estaba explorando las relaciones entre los numeradores y los denominadores, una tarea compleja con un gran potencial matemático. Me pregunté cómo de incómodo se habría sentido el Sr. Pierce: ¿Estaba Luis confundiendo no solo a sí mismo, sino también al resto de la clase? Sin saber muy bien qué hacer, el Sr. Pierce le dio las gracias a Luis por compartir su estrategia y siguió adelante. ●

Como parte de mi investigación en curso sobre cómo los estudiantes con discapacidades de aprendizaje experimentan la clase de matemáticas (Lambert, 2015), mencioné a Luis en una entrevista que mantuve más tarde ese mismo día con estos dos profesores. Quedó bastante claro que el Sr. Pierce y la Sra. Scott tenían perspectivas muy diferentes sobre Luis. La Sra. Scott habló de cómo Luis nunca se rendía al resolver un problema matemático

y de cuánto conocimiento matemático revelaban sus estrategias únicas. El Sr. Pierce asintió, pero añadió: «Pero sus estrategias a veces no funcionan». También habló de la baja puntuación de Luis en la prueba estandarizada de matemáticas y de cómo Luis nunca parecía memorizar los procedimientos que enseñaba el Sr. Pierce. La Sra. Scott parecía sentirse a la defensiva en nombre de Luis, insistiendo en que «si tengo un alumno en mi carrera que realmente se convierta en matemático, ese será Luis». El Sr. Pierce no se mostró en desacuerdo, pero puso cara de extrañeza y preguntó sobre la discapacidad de aprendizaje de Luis y las dificultades relacionadas con ella.

¿Cómo pueden dos profesores tener concepciones tan diferentes de la aptitud matemática de un alumno? Para la Sra. Scott, Luis es un innovador matemático iconoclasta, un matemático en potencia. Para el Sr. Pierce, Luis apenas es capaz de reproducir procedimientos. ¿Se trata de Luis? ¿O es que estos profesores tienen ideas diferentes sobre la capacidad y la discapacidad en matemáticas? ¿Están siquiera de acuerdo en lo que son las matemáticas?

El Sr. Pierce, un profesor de matemáticas atento y amable, enseñaba de forma tradicional, mostrando procedimientos, dando ejemplos, pidiendo a los alumnos que completaran hojas de ejercicios y luego compartiendo las respuestas. Quería aprender más sobre la enseñanza de las matemáticas basada en la investigación, pero se mostraba indeciso. Le preocupaba que los alumnos no aprendieran lo necesario para aprobar los exámenes estatales si dejaba de mostrarles procedimientos concretos. La Sra. Scott, una educadora especial, consideraba que su trabajo en la clase de matemáticas consistía en desarrollar la confianza de los alumnos en esta materia. La Sra. Scott valoraba la creatividad y la participación de Luis en la resolución de problemas, ya que ese era su objetivo como profesora de matemáticas. El Sr. Pierce, por su parte, tenía como objetivo que los alumnos aprendieran los procedimientos necesarios para los exámenes. Dado que ese objetivo era difícil para Luis, el Sr. Pierce lo veía como un problema que había que solucionar y esperaba que la Sra. Scott pudiera hacerlo con su experiencia. Para él, el objetivo era primero los procedimientos y luego la resolución de problemas. Para la Sra. Scott, la resolución de problemas era el objetivo principal. Así que no solo veían a Luis de manera diferente, sino que también veían las matemáticas de manera diferente.

Pero, ¿cómo se veía Luis a sí mismo? Luis se empeñó en verse a sí mismo como un pensador matemático durante los tres años de secundaria en los que lo seguí. En séptimo grado, me dijo que le gustaban «los problemas que me dan problemas», que comparaba con las hojas de ejercicios, «que no son nada». Lo vi esconder tareas matemáticas interesantes debajo de su libro de texto y seguir trabajando en ellas en secreto. Cuando le pregunté qué tipo de estudiante de matemáticas era, respondió inmediatamente: «Del tipo que habla», y continuó diciéndome que lo que valoraba de sí mismo era cómo cuestionaba continuamente las matemáticas, buscando siempre otra forma. A pesar de la difícil relación con su profesor de matemáticas de octavo curso, cuando le pregunté al final del año qué opinaba de las matemáticas, sonrió y me dijo: «Sigo encantado con las matemáticas».

LA DISCAPACIDAD ES COMPLEJA

La discapacidad es un concepto muy amplio que incluye múltiples tipos de diferencias cognitivas, de movilidad y de otro tipo. **La figura 2.1** muestra aproximadamente la

complejidad de la categoría de discapacidad (no todas las discapacidades están representadas).

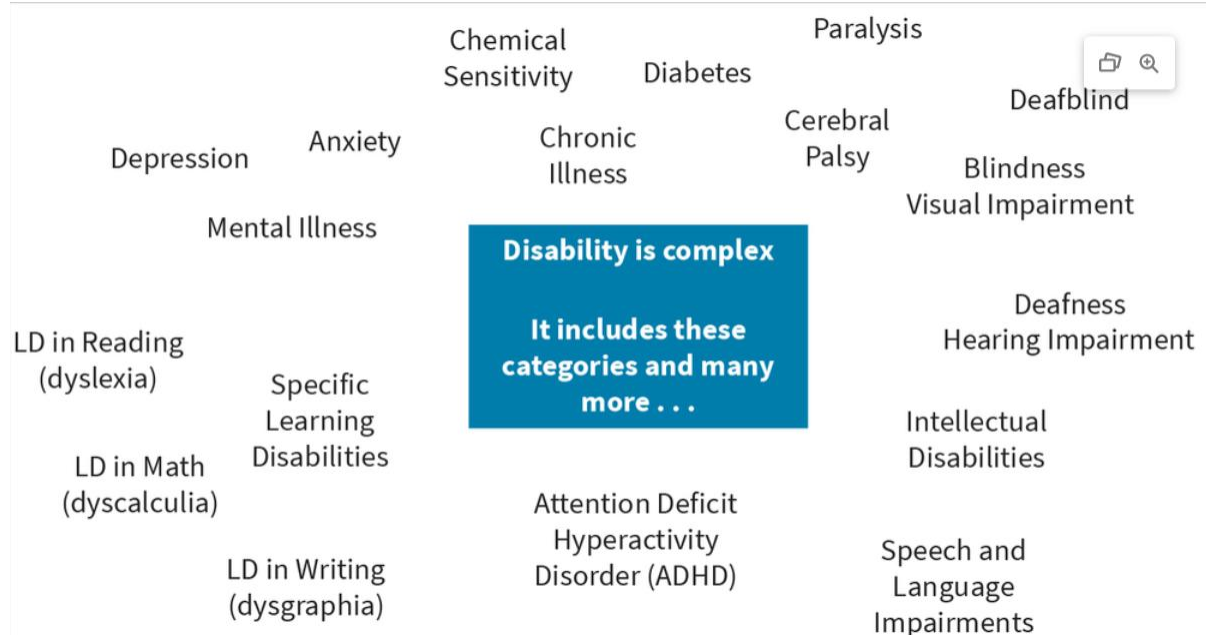


Figura 2.1 • El concepto de discapacidad

La discapacidad incluye diferencias sensoriales, como las deficiencias visuales y auditivas. Otras discapacidades son la parálisis cerebral y otras diferencias de movilidad. La discapacidad incluye la ansiedad y la depresión, dos diferencias humanas muy comunes. También incluye diferencias cognitivas, conocidas como neurodiversidad, que incluyen discapacidades de aprendizaje, discapacidades intelectuales, autismo y trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH). La discapacidad de aprendizaje (LD) es una categoría general que incluye dificultades en la lectura, la escritura y las matemáticas, a menudo conocidas, respectivamente, como dislexia, disgrafía y discalculia. Este capítulo y el siguiente se centran en la dislexia y la discalculia, que exploraremos en profundidad.

La discapacidad está a nuestro alrededor

La discapacidad forma parte de la condición humana. Más del 20 % de las personas en Estados Unidos tienen alguna discapacidad, una cifra que ha aumentado desde que comenzó la pandemia del coronavirus 2019 (COVID-19). Muchos profesores tienen discapacidades. La discapacidad es algo con lo que crecí: niños del barrio y de la iglesia, adultos, mi mejor amigo de la infancia, varios miembros de mi familia. Para mí, y para la mayoría de nosotros, son partes naturales de la vida. Sin embargo, de niño me di cuenta de que un amigo del barrio, que tenía síndrome de Down, asistía a clases separadas que se impartían en el sótano de nuestra escuela secundaria. Recuerdo que me preguntaba por qué.

Las personas con discapacidades a menudo se identifican en múltiples categorías. Por ejemplo, es común que una persona con discapacidad intelectual también tenga un diagnóstico de TDAH. Cada categoría tiene una enorme diversidad; el TDAH, por ejemplo, puede experimentarse de manera muy diferente según la persona. Y algunas comunidades no se identifican como discapacitadas, en particular la comunidad sorda. En cambio, la comunidad se entiende a sí misma como una minoría lingüística.

Las personas con discapacidades son tan diversas y complejas como el resto de la población humana, incluyendo la diversidad racial, de género y lingüística. Todas las personas discapacitadas tienen identidades interseccionales, lo que significa que son seres humanos complejos e íntegros. El autismo y la dislexia se asocian predominantemente con los hombres blancos, a pesar de la diversidad que existe en estas categorías de discapacidad. Aunque, en su conjunto, los estudiantes con discapacidades constituyen el 15 % de la población escolar, el 19 % de los estudiantes nativos americanos y el 17 % de los estudiantes negros recibieron servicios de educación especial en 2022, lo que significa que estos estudiantes son más propensos a recibir educación especial que otros estudiantes (Oficina de Programas de Educación Especial de la NAEP, 2023). La educación especial no ha abordado de manera significativa estas cuestiones y, como campo, tiende a eludir el tema del color, asumiendo que la discapacidad es el aspecto más importante y minimizando el papel de la raza (Annamma et al., 2018).

Sin embargo, la raza y otros aspectos de la cultura y la identidad son muy importantes para los jóvenes discapacitados. En la escuela secundaria, a Luis se le diagnosticó una discapacidad de aprendizaje en lectura, lo que hoy se conoce como dislexia, pero que en el sistema escolar al que asistía en ese momento no se denominaba así. Esa no fue la única discapacidad que se le diagnosticó a Luis en la escuela. En la escuela primaria, su Programa de Educación Individualizada (IEP) indicaba como discapacidad principal un trastorno de conducta, con una discapacidad de aprendizaje como secundaria. Pero cuando estaba en quinto grado y pasaba a la escuela secundaria, sus profesores y su familia celebraron una reunión del IEP. Decidieron eliminar la etiqueta de trastorno de conducta, tanto porque ya no tenía esas dificultades como porque era demasiado arriesgado para él tener la etiqueta de trastorno de conducta como latino. Los latinos con esta etiqueta tienen tres veces más probabilidades que los niños blancos con la misma etiqueta de ser colocados en entornos de educación especial (Skiba et al., 2011). En este gran sistema escolar urbano, esta etiqueta probablemente le impediría acceder a la educación general. La raza, la discapacidad y el género son factores importantes para el acceso a las oportunidades educativas.

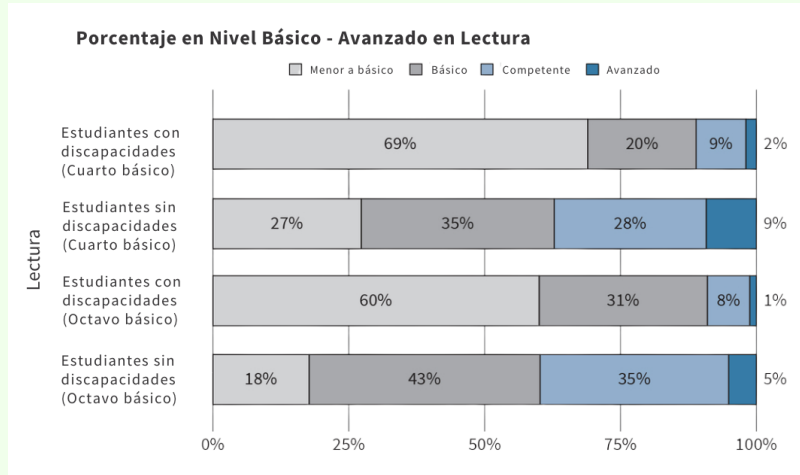
Tanto las discapacidades de aprendizaje como las discapacidades conductuales/emocionales se conocen como categorías subjetivas, lo que significa que no se pueden diagnosticar mediante un biomarcador medible. En la práctica, esto significa que ha habido décadas de debate sobre la mejor manera de diagnosticarlas, en particular las discapacidades de aprendizaje (McFarland et al., 2013). También significa que los prejuicios de los profesores o psicólogos también pueden afectar a los resultados (Artiles et al., 2002). Sin embargo, esto no significa que las discapacidades de aprendizaje y/o la dislexia no existan, en absoluto, sino que, dado que no existe una única forma de diagnosticar una DA y la dislexia, hay estudiantes que son identificados erróneamente.

La importancia de cómo definimos el problema

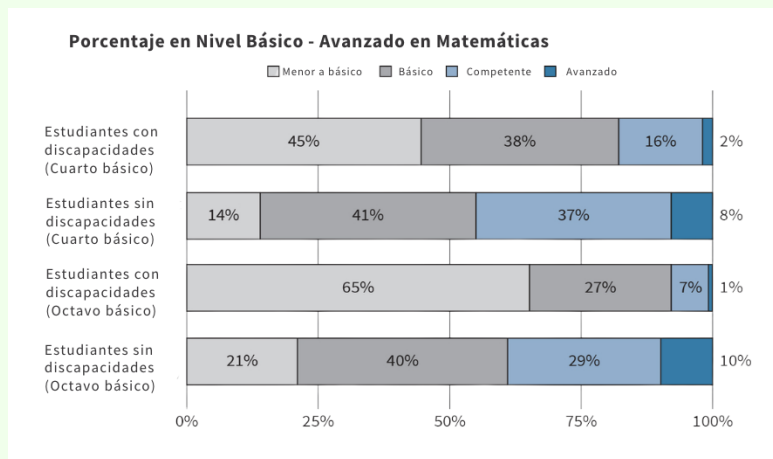
Un ejercicio útil para comprender cualquier problema complejo es tratar de identificar cómo se plantea el problema. Piensa por qué has decidido leer este libro. ¿Lo has hecho porque has visto un problema? Si es así, ¿cómo llamarías a ese problema?

Piénselo

Empiece por examinar los datos sobre las calificaciones en lectura tanto en cuarto como en octavo grado, comparando a los estudiantes con y sin discapacidades en los Estados Unidos. Tómese un minuto y prediga lo que verá en el mismo tipo de gráfico para las calificaciones en matemáticas. ¿Qué observa y qué le llama la atención de estos datos?



FUENTE: Departamento de Educación de los Estados Unidos, Instituto de Ciencias de la Educación, Centro Nacional de Estadísticas Educativas, Evaluación Nacional del Progreso Educativo (NAEP), 2013. Oficina de Programas de Educación Especial de la NAEP, base de datos de la Ley de Educación para Personas con Discapacidades (IDEA), 2023.



FUENTE: NAEP (2013, 2023).

Las puntuaciones en lectura parecen mejorar entre cuarto y octavo grado para ambos grupos. Sin embargo, en matemáticas, las puntuaciones disminuyen con el tiempo: todos los estudiantes obtienen peores resultados en octavo grado en comparación con cuarto grado. En el caso de los estudiantes con discapacidad, la diferencia entre estas puntuaciones es mucho mayor. En lectura, los estudiantes con discapacidad mejoran con el tiempo en la escuela en comparación con sus compañeros sin discapacidad. Sin embargo, en matemáticas, cuanto más tiempo pasan los estudiantes en la escuela, mayor es la diferencia entre los estudiantes con discapacidad y los estudiantes sin discapacidad. ¿Por qué la situación es tan diferente en matemáticas en comparación con la lectura?

Cuando muestro estos gráficos a los profesores, he oído comentar que la enseñanza de la lectura recibe más atención y tiempo que la de las matemáticas. Otros señalan que las matemáticas se vuelven mucho más abstractas después del cuarto grado. Otros se preguntan si los profesores de matemáticas de la escuela secundaria enseñan de forma más tradicional. Otros profesores mencionan sus experiencias de que los alumnos con discapacidades a menudo son retirados de las clases de educación general en la escuela secundaria y expuestos a un plan de estudios más procedimental en clases separadas de educación especial.

Los estudios respaldan estas afirmaciones y documentan que a los alumnos con discapacidades se les ofrecen menos oportunidades de participar en matemáticas conceptuales y basadas en estándares, tanto en entornos de educación especial como de educación general (Jackson y Neel, 2006; Kurz et al., 2014). Los alumnos con discapacidades tienen menos oportunidades de resolver problemas abiertos y de participar en un pensamiento matemático sostenido. Esta falta de oportunidades podría ser una pieza importante del rompecabezas del gráfico que acabamos de examinar.

Quizás la discriminación sea parte del problema. Un estudio descubrió que los estudiantes con discapacidades no eran asignados a clases de álgebra en la misma proporción que sus compañeros sin discapacidades, incluso cuando se controlaban los resultados académicos (Faulkner et al., 2013). El simple hecho de ser un niño en el sistema de educación especial significaba que los niños tenían menos probabilidades de ser asignados a la clase de matemáticas más exigente disponible, independientemente de sus calificaciones anteriores en matemáticas.

O tal vez estamos enfocando el problema de forma errónea. Quizás el problema no radique en las calificaciones de los exámenes, sino en la falta de participación de los estudiantes discapacitados en las carreras y especialidades STEM. A pesar de su talento documentado, los estudiantes con discapacidades no están representados de forma proporcional en los campos STEM (Dunn et al., 2012). La experta en educación matemática Rochelle Gutiérrez (2002) ha escrito que los estudiantes de color no solo necesitan las matemáticas, sino que las matemáticas también necesitan la brillantez de los estudiantes de color. Cuando se excluye a grupos de personas de campos como las matemáticas y otros campos STEM que dependen de la innovación, todos salimos perdiendo. Los estudiantes con discapacidades necesitan las matemáticas, pero las matemáticas también los necesitan a ellos (Tan y Kastberg, 2017). Los estudiantes con discapacidades deben tener el mismo acceso a las carreras STEM, así como al éxito en las clases STEM. Todos estos análisis se alejan de centrarse en las posibles deficiencias de los niños con discapacidades y se centran en los sistemas en los que estos estudiantes aprenden.

MODELOS DE DISCAPACIDAD

Para comprender cómo podemos replantearnos «el problema» de la discapacidad y las matemáticas, veamos cómo entendemos la discapacidad en sí misma. En concreto, veamos cuatro formas diferentes de pensar sobre la discapacidad:

El modelo médico

El modelo social
La neurodiversidad
El modelo de acceso de Vygotsky

Estas diferentes formas de entender la discapacidad ofrecen diferentes posibilidades en nuestro trabajo como profesores de matemáticas para alumnos con discapacidad, diferentes formas de imaginar qué es la discapacidad y cómo se relaciona con las matemáticas.

Modelo médico de la discapacidad

La comprensión de las discapacidades en la cultura occidental ha surgido del sistema médico. Las discapacidades se entienden como problemas individuales que deben solucionarse mediante intervención médica. Cuando tenemos un problema médico, acudimos al médico, le explicamos el problema y esperamos que nos dé una solución, una cura, una forma de solucionarlo.

Cuando aplicamos el modelo médico a la educación, vemos la discapacidad como algo que hay que solucionar, erradicar, eliminar. Cuando se entiende a los estudiantes principalmente a través de sus déficits, la solución desde la perspectiva del modelo médico es remediar esos déficits mediante una intervención específica. Los estudiantes se someten a tratamientos diseñados para solucionarlos. Desde la perspectiva del modelo médico, la solución es centrarse intensamente en los déficits. El debate sobre los puntos fuertes se considera irrelevante para el problema.

Pensemos en el modelo médico de la discapacidad en relación con Luis. Luis tenía un IEP por una discapacidad de aprendizaje en el área de la lectura, ahora más conocida como dislexia. La dislexia es en realidad un término mucho más antiguo para esta diferencia cognitiva, pero cayó en desuso en la psicología educativa y la educación especial en favor de la categoría más amplia de discapacidades de aprendizaje. Actualmente, «discapacidades específicas del aprendizaje» es el término genérico utilizado en la legislación estadounidense para referirse a los estudiantes con dislexia (DA en lectura), discalculia o discapacidad del aprendizaje matemático (DA en matemáticas o DLM) y disgrafía (DA en escritura) (también hay otras subcategorías bajo este término genérico). Gran parte de la investigación sobre las LD y las matemáticas se centra en los estudiantes con discalculia o MLD, que pueden describirse como una dificultad significativa para aprender matemáticas. Sin embargo, los estudiantes con LD en su conjunto, siendo el subgrupo más común, con diferencia, el de la dislexia/LD en lectura, también obtienen resultados significativamente inferiores como grupo en matemáticas (Wei et al., 2013). Además, los estudiantes pueden tener dificultades significativas tanto en lectura como en matemáticas.

Desde el punto de vista médico, la dislexia es una discapacidad neurobiológica hereditaria que se caracteriza por dificultades en la lectura, la escritura y la ortografía, a menudo inesperadas en comparación con otras habilidades académicas (Lyon et al., 2003). Aunque la principal dificultad para las personas con dislexia es el procesamiento fonémico, que afecta al aprendizaje de la lectura, también suelen presentarse patrones de dificultades en el procesamiento del lenguaje, la función ejecutiva, la memoria de trabajo y la memorización

de hechos y procedimientos (Cortiella y Horowitz, 2014). Por supuesto, no todas las personas con dislexia/discapacidad de aprendizaje experimentan todas estas dificultades.

Un reto importante en matemáticas es la memorización de datos y procedimientos. Los estudiantes con dislexia tienen dificultades para memorizar datos inconexos (De Clercq-Quaegebeur et al., 2018). Los adultos con dislexia siguen teniendo dificultades para memorizar operaciones de multiplicación (Simmons y Singleton, 2006). Los estudiantes con dificultades de aprendizaje que establecen conexiones entre los datos son más capaces de recordarlos que aquellos que utilizan la memorización como estrategia (Erenberg, 1995). En mis dos primeros años observando a Luis en sus clases de matemáticas de sexto y séptimo grado, puedo dar fe de su dificultad para memorizar procedimientos. El Sr. Pierce lo señaló como un reto en sexto grado. En séptimo grado, Luis tuvo una profesora llamada Sra. Márquez, una excelente profesora de matemáticas que era capaz de enseñar tanto la resolución de problemas como los procedimientos en su clase diaria de 90 minutos. En otoño de su séptimo curso, la Sra. Márquez describió a Luis como uno de sus mejores alumnos y a menudo le pedía que explicara sus estrategias inusuales. Sin embargo, en la primavera de ese año, la Sra. Márquez eliminó la resolución de problemas basada en la investigación, que había sido una parte importante de la clase en otoño. Lo hizo para centrarse en la enseñanza de los procedimientos exigidos en el examen estatal. En primavera, se le pidió a Luis que resolviera problemas como operaciones con números negativos utilizando reglas memorizadas. Él no podía o no quería hacerlo, por muchas veces que le enseñaran las reglas. La Sra. Márquez me dijo que Luis «no puede memorizar» y empezó a preocuparse por él.

Utilizando el modelo médico, podríamos suponer que Luis tiene déficits en su memoria que podrían haber afectado a su capacidad para memorizar las reglas de suma y resta de números enteros. Utilizando un modelo de pensamiento deficitario, podríamos entonces centrarnos solo en los procedimientos y la memorización con Luis, proporcionándole una instrucción intensiva precisamente en lo que más le cuesta.

Pero si su debilidad es memorizar reglas, ¿por qué le enseñaríamos a través de la memorización de reglas? Un día, en plena primavera, con sus procedimientos memorizados, Luis estaba terminando fácilmente una hoja de ejercicios sobre suma y resta de números enteros. Le pregunté por su estrategia. Sonrió ampliamente y luego me susurró que estaba utilizando «la regla numérica gigante que tengo en la cabeza». Luis nos enseña que puede utilizar sus puntos fuertes en el procesamiento visual para imaginar una regla numérica y utilizarla para encontrar respuestas de forma elegante. ¿Por qué no aprovecharíamos esta fortaleza única que tiene?

Centrarse en las deficiencias, en lugar de en las fortalezas, puede ser una estrategia contraproducente.

Modelo social de la discapacidad

Nuestro siguiente modelo de discapacidad fue creado por las propias personas con discapacidad. El movimiento moderno por los derechos de las personas con discapacidad se basó en un cambio fundamental, pasando de los modelos médicos e individuales de

discapacidad a los modelos sociales (Linton, 1998). Desarrollado por activistas discapacitados en Inglaterra (Oliver, 2009), el modelo social reconoce que las personas discapacitadas pueden tener diferencias biológicas, neurológicas o físicas reales, pero el modelo reserva el término «discapacidad» para los aspectos discapacitantes tanto de la sociedad como de un entorno construido inaccesible. El cambio al modelo social de la discapacidad supone un cambio hacia la accesibilidad en lugar de limitarse a la rehabilitación. El modelo social nos pide que no nos fijemos en los alumnos, sino en las aulas, los planes de estudios y los sistemas que rodean al alumno. ¿Puede un aula incapacitar a un alumno?

Volvamos al ejemplo de Luis. Su profesora de séptimo curso, la Sra. Márquez, consideraba a Luis un «alumno conceptual de primer nivel» en otoño, cuando valoraba la enseñanza basada en la investigación. Cuando pasó a una enseñanza explícita y procedimental en la que los alumnos tenían que memorizar reglas concretas, Luis se convirtió en una gran preocupación para ella, ya que no podía o no quería utilizar ciertos métodos, prefiriendo los que él mismo había desarrollado. Luis era considerado un innovador matemático cuando las matemáticas se veían como una materia basada en la investigación, y discapacitado cuando las matemáticas se basaban en la memorización de procedimientos previamente determinados. En esta comparación, podemos ver cómo el modelo social de la discapacidad es importante en una clase de matemáticas. Luis ha seguido siendo prácticamente el mismo. Las diferentes formas de enseñar matemáticas hacen que parezca brillante en matemáticas o que tenga problemas.

Otra alumna de la clase de Luis tuvo una trayectoria opuesta. Ana también tenía una etiqueta de discapacidad de aprendizaje, pero era una estudiante muy diferente a Luis. Mientras que Luis había asistido a una escuela primaria progresista con un plan de estudios de matemáticas basado en la investigación, Ana solo había experimentado las matemáticas tradicionales hasta que llegó a la clase de séptimo grado de la Sra. Márquez. En la primera mitad del año, Ana era motivo de preocupación para la Sra. Márquez, quien decía que Ana «no era buena en eso», refiriéndose a la resolución de problemas basada en la investigación. Ana me dijo en las entrevistas que su forma de hacer matemáticas era «simplemente aprender lo que [mi profesora] dice, aprendo todo a partir de ahí». Ana también dijo que cuando los problemas eran diferentes de lo que decía la profesora, se sentía «confusa». Ana también describió la intensa ansiedad matemática que sentía al hacer los exámenes en clase y, en particular, al prepararse para los exámenes estandarizados de alto nivel que se celebraban en primavera. A medida que la enseñanza de las matemáticas se orientaba hacia la preparación de estos exámenes, se convirtió en una mera memorización de procedimientos específicos. Ahora que lo que se valoraba era la memorización, Ana se convirtió en una de las mejores alumnas, a pesar de su creciente ansiedad por las matemáticas.

En muchos aspectos, Ana y Luis siguen siendo los mismos estudiantes de matemáticas que en séptimo curso. Sin embargo, a medida que cambia lo que se valora en la clase de matemáticas, se les considera más o menos competentes en esta materia. La discapacidad parece no solo formar parte del estudiante individual, sino también de lo que se valora en su clase de matemáticas, lo que demuestra cómo la discapacidad puede construirse socialmente en las aulas de matemáticas (Lambert, 2015).

La discapacidad parece no solo ser parte de un estudiante individual, sino también de lo que se valora en su clase de matemáticas, lo que demuestra cómo la discapacidad puede construirse socialmente en las aulas de matemáticas

Modelo de neurodiversidad de la discapacidad

Otro modelo de discapacidad es la neurodiversidad, un movimiento de justicia social que se desarrolló a partir del activismo de las personas autistas (Robertson y Ne'eman, 2008). A partir de la década de 1990, los activistas autistas comenzaron a abogar por una nueva forma de pensar sobre el autismo. Argumentan que el autismo conlleva una serie de retos, sí, pero también una serie de fortalezas. En lugar de ser entendidos como un problema, estos activistas sostienen que deben ser vistos como los individuos complejos que son. Las personas neurodiversas exigen ser vistas no como deficientes, sino como diferentes: parte de la diversidad cognitiva natural y beneficiosa de la sociedad. A continuación se presenta un extracto de una descripción del autismo, realizada no por un manual de diagnóstico, sino por la Red de Autodefensa Autista (ASAN), una organización de autismo dirigida por personas autistas.

Las personas neurodiversas exigen ser vistas no como deficientes, sino como diferentes: parte de la diversidad cognitiva natural y beneficiosa de la sociedad.

Acerca del autismo por ASAN (extracto)

Cada persona autista experimenta el autismo de manera diferente, pero hay algunas cosas que muchos de nosotros tenemos en común.

1. **Pensamos de manera diferente.** Podemos tener intereses muy fuertes en cosas que otras personas no entienden o que parecen no importarles. Podemos ser excelentes resolviendo problemas o prestar mucha atención a los detalles. Puede que nos lleve más tiempo pensar en las cosas.
2. **Procesamos nuestros sentidos de manera diferente.** Podemos ser muy sensibles a cosas como las luces brillantes o los sonidos fuertes. Podemos tener dificultades para comprender lo que oímos o lo que nos dicen nuestros sentidos. Puede que no nos demos cuenta de si tenemos dolor o hambre. Podemos repetir el mismo movimiento una y otra vez. Esto se denomina «stimming» y nos ayuda a regular nuestros sentidos.
3. **Nos movemos de manera diferente.** Es posible que tengamos dificultades con las habilidades motoras finas o la coordinación. El habla puede ser muy difícil porque requiere mucha coordinación.
4. **Nos comunicamos de manera diferente.** Es posible que hablemos utilizando la ecolalia (repetiendo cosas que hemos oído antes) o escribiendo lo que queremos decir. Algunas personas autistas utilizan la comunicación aumentativa y alternativa (CAA) para comunicarse. Algunas personas también pueden comunicarse con su

comportamiento o con la forma en que actúan. No todas las personas autistas pueden hablar, pero todas tenemos cosas importantes que decir.

5. **Socializamos de manera diferente.** Es posible que algunos de nosotros no entendamos o no sigamos las reglas sociales que han creado las personas no autistas. Es posible que seamos más directos que otras personas. El contacto visual puede hacernos sentir incómodos. Algunos de nosotros quizá no seamos capaces de adivinar cómo se sienten las personas. ¡Esto no significa que no nos importe cómo se sienten! Algunas personas autistas son muy sensibles a los sentimientos de los demás.

(Este es un extracto de la breve definición de autismo de ASAN, ¡Bienvenido a la comunidad autista!

Piénsalo

¿Qué te llama la atención y qué te preguntas sobre esta definición de autismo? ¿En qué se diferencia de las definiciones de autismo que has visto anteriormente? ¿Crees que es importante que esta descripción haya sido escrita por personas autistas?

La neurodiversidad surgió en la comunidad autista, pero ha sido adoptada por personas con dislexia, síndrome de Tourette, TDAH y enfermedades mentales. Desde la década de 1970 existe un movimiento en la comunidad de personas con enfermedades mentales llamado Mad Pride (Orgullo Loco), cuyo objetivo es desestigmatizar diferencias como la depresión, la esquizofrenia y el trastorno bipolar. Las personas con discapacidad intelectual también forman parte de la comunidad de la neurodiversidad.

La neurodiversidad también es un hecho científico: todos los seres humanos SON diferentes, únicos e individuales, y los cerebros cambian en función de la experiencia (Cantor et al., 2019). Cada cerebro humano es diferente del siguiente. Esta variabilidad humana natural se denomina variabilidad del alumno en las ciencias del aprendizaje, uno de los fundamentos del Diseño Universal para el Aprendizaje (Rose, 2017).

La neurodiversidad es una forma de pensar sobre las diferencias cognitivas basada en las fortalezas (o en los activos) que se superpone al modelo social de la discapacidad. Los activistas de la neurodiversidad abogan por la accesibilidad en lugar de la remediación, o simplemente por «arreglar» el problema. Al igual que en el modelo social, el problema se encuentra en los contextos, las instituciones, las prácticas y los sistemas inaccesibles. En la siguiente sección, volvemos a la dislexia y revisamos las investigaciones sobre las fortalezas de las personas disléxicas.

La neurodiversidad en acción: fortalezas de la dislexia

El debate sobre las posibles fortalezas visoespaciales asociadas a la dislexia lleva casi 100 años en marcha, desde 1925 (Schneps et al., 2007). Una fortaleza asociada a la dislexia en

varios estudios de investigación es el pensamiento espacial tridimensional (von Károlyi y Winner, 2004), que está relacionado con las fortalezas en mecánica y visualización compleja (Attree et al., 2009). Otra fortaleza que se observa en las personas con dislexia es la categoría del razonamiento interconectado. Esto significa ver el PANORAMA GENERAL, centrándose en los patrones (Eide y Eide, 2012). Una última fortaleza documentada es el pensamiento creativo; los estudiantes con dislexia obtuvieron puntuaciones más altas que los que no la padecían en las medidas de pensamiento original (Akhavan Tafti et al., 2009) y en tareas que requerían soluciones novedosas y creativas (Everatt et al., 1999). Una vez más, no todas las personas con dislexia y/o dificultades de aprendizaje en el ámbito de la lectura tienen este conjunto de fortalezas; varía según el individuo. Además, hay mucha menos investigación en el ámbito de las fortalezas que en el de las deficiencias, lo que hace que el campo de investigación en su conjunto sea menos sólido.

Taylor y Vestergaard (2022) propusieron que el conjunto de fortalezas y desafíos de la dislexia podría entenderse como una fortaleza evolutiva hacia la búsqueda exploratoria, un estilo cognitivo de exploración y establecimiento de conexiones entre ideas, que conlleva compensaciones en la automatización o el pensamiento rutinario. Analizaron cómo la evolución avanza hacia la variabilidad en sí misma, ya que los seres humanos trabajan mejor juntos cuando cuentan con conjuntos de habilidades variados. ¿Cómo podría influir la búsqueda evolutiva en las matemáticas?

Taylor y Vestergaard (2022) propusieron que el conjunto de fortalezas y desafíos de la dislexia podría entenderse como una fortaleza evolutiva hacia la búsqueda exploratoria, un estilo cognitivo de exploración y establecimiento de conexiones entre ideas, que conlleva compensaciones en la automatización o el pensamiento rutinario.

OTROS MODELOS BASADOS EN FORTALEZAS

Ganancia por sordera

Aunque la neurodiversidad se desarrolló en la comunidad autista, han surgido diferentes teorías que se centran en las fortalezas en otras comunidades. Un concepto crítico en los estudios sobre la sordera es la ganancia de la sordera (lo contrario de «pérdida auditiva»), o «las ganancias cognitivas, creativas y culturales únicas que se manifiestan a través de las formas de ser de las personas sordas en el mundo» (Bauman y Murray, 2014, p. xv). Las investigaciones han comenzado a estudiar las fortalezas asociadas con la sordera, más concretamente, las fortalezas asociadas con el uso de las lenguas de signos. Los estudios han descubierto fortalezas en las personas sordas en cuanto a la atención visual y la memoria visual (Craig et al., 2022) y el tiempo de reacción visual periférica (también presente en los intérpretes de lengua de signos) (Codina et al., 2017). Otros trabajos han descubierto que la fluidez en la lengua de signos se correlaciona con las habilidades de rotación mental (Kubicek y Quandt, 2021). Las teorías sobre estas fortalezas de quienes utilizan lenguas de signos se basan en que estas lenguas son intrínsecamente visoespaciales, ya que la comunicación consiste en transformar imágenes visuales en el

espacio y el tiempo. ¿Cómo pueden influir estas fortalezas en las matemáticas?

Las teorías de acceso de Vygotsky

Lev Vygotsky, uno de los teóricos educativos más importantes del siglo XX, prestó atención a la discapacidad de una manera radical a pesar de trabajar hace casi 100 años. En sus escritos de finales de la década de 1920, rechazó la idea de que la discapacidad fuera algo exclusivo del individuo (Vygotsky, 1993). De manera similar al modelo social de la discapacidad, separó la condición discapacitante del «defecto» o la deficiencia. Al igual que consideraba que el aprendizaje estaba mediado por las interacciones con otras personas y con herramientas educativas, veía la discapacidad no como algo interno de una persona, sino como algo que se crea cuando un individuo no puede acceder a la interacción con otras personas y/o a herramientas culturales. Así, por ejemplo, una persona ciega no puede acceder al texto escrito en una página. ¿Es eso un problema interno de la persona? Vygotsky diría que no, que el problema está en el acceso a la herramienta. Señaló que estos problemas de acceso pueden resolverse con nuevas herramientas, como la creación del braille o la conversión de texto a voz. Si una persona sigue teniendo acceso a la herramienta cultural importante (el texto), su diferencia individual (la ceguera) no importa.

Vygotsky (1993) señaló que las personas con discapacidad parecían encontrar formas de utilizar (o inventar) nuevas herramientas de mediación, que pueden tener nuevas posibilidades para el aprendizaje. No se trata de superar la discapacidad, sino de encontrar formas de compensarla, de adaptarse para abrirse camino en el mundo. Es un acto creativo, rediseñar el entorno para hacerlo más accesible, crear o encontrar nuevas herramientas cuando las demás no funcionan.

Dylan Lynn y el acceso a las matemáticas

En un proyecto de investigación colaborativo, la Dra. Katherine Lewis y Dylan Lynn (2018) utilizaron este enfoque para comprender la discalculia. Dylan Lynn era estudiante de estadística en la Universidad de California, Berkeley, y trabajó como analista de datos después de graduarse. Ella también tiene discalculia. Junto con la Dra. Lewis, estudiaron las formas en que Dylan hizo que las matemáticas avanzadas fueran accesibles para ella (Lewis y Lynn, 2018).

Definamos la discalculia. El término discalculia se aplica cuando un estudiante tiene una dificultad excepcional con las matemáticas, pero no necesariamente con otras materias. También se puede denominar «MLD» o «discapacidad de aprendizaje matemático». Los investigadores estiman que el 6 % de la población puede padecer discalculia (Shalev, 2007). La discalculia se caracteriza por la dificultad con las representaciones matemáticas y el simbolismo, como conectar los números con las cantidades o el reconocimiento perceptivo de la cantidad (Butterworth, 2010). Los alumnos con discalculia también suelen tener dificultades para dominar las matemáticas básicas, como las operaciones de suma y multiplicación. Algunos creen que existe un único «déficit fundamental» responsable de la discalculia; otros creen que, dado que las matemáticas se componen de múltiples tipos de tareas cognitivas, hay innumerables formas en que un alumno puede tener dificultades significativas con las matemáticas (Dowker, 2019).

Es importante señalar que aún nos queda mucho por aprender sobre la discalculia. Casi todas las investigaciones sobre la discalculia se centran en los déficits en matemáticas básicas, por lo que sabemos poco sobre los puntos fuertes de las personas con discalculia, así como sobre su rendimiento en matemáticas avanzadas. Por eso es tan importante la investigación de Lewis y Lynn (2018).

En las evaluaciones que realizó como adulta, Dylan tardó mucho más que los demás en hacer cálculos numéricos, lo que le dio derecho a recibir servicios para discapacitados como estudiante universitaria. Sin embargo, Dylan describió su mayor obstáculo en matemáticas como el trabajo con símbolos abstractos (Lewis y Lynn, 2018). Durante su licenciatura en estadística, Dylan reescribía las ecuaciones de forma precisa en papel milimetrado, añadiendo palabras para describir los símbolos y asegurándose de que todas las notaciones fueran claras. También se aseguraba de basar siempre los procedimientos en contextos de la vida real, por lo que le gustaba tanto la estadística: podía entender su relación con los contextos del mundo real.

Dylan identificó cuáles eran sus problemas de acceso: la naturaleza abstracta de los símbolos matemáticos. Creó un sistema en el que encontró formas de sortear lo que le resultaba difícil. A pesar de estas soluciones, Dylan seguía enfrentándose a muchas barreras para alcanzar su objetivo de obtener una licenciatura en estadística. Citada en una entrevista con el Dr. Lewis, Dylan dijo:

Es realmente una pena para mí, creo que, en matemáticas, no basta con entender el concepto. No basta con obtener la respuesta correcta, también hay que hacerlo en un tiempo determinado, lo que inevitablemente es como una restricción artificial realmente extraña. Especialmente ahora que he trabajado en la industria como analista de datos. Y sí, tenía limitaciones de tiempo, tenía que terminar un informe en un tiempo determinado o algo así. No es como sentarse a hacer un examen y tener 60 minutos para hacer esta página tan complicada y este enorme esfuerzo mental, en el que este tipo de reescrituras se convertirían en un verdadero problema, simplemente me quedaría sin tiempo. (2018, p. 14)

Dylan proporcionó las siguientes sugerencias que utilizó en su trabajo como tutora de estudiantes con discalculia (Lewis y Lynn, 2018).

- Hacer que los estudiantes identifiquen sus propios «problemas de acceso».
- Identificar y aprovechar sus puntos fuertes.
- Conecten las matemáticas con la vida real.
- Fomentar múltiples vías de solución.
- Dar a los alumnos la capacidad de decidir qué es lo que les funciona.

Aún queda mucho por aprender sobre la discalculia. Pero me pregunto por qué la investigación se centra tanto en lo que los alumnos como Dylan no pueden hacer, en lugar de ampliar nuestro conocimiento sobre lo que sí pueden hacer.

Es importante cómo pensamos los profesores sobre la discapacidad. Podemos utilizar el modelo médico, como hacen muchos entornos educativos. Pero también podemos utilizar las innovaciones del modelo social, la neurodiversidad, la ganancia por sordera y los modelos de acceso, que nos desafían a ver las discapacidades como fortalezas y retos, para cambiar el aula, no al niño. Esto deja clara nuestra misión: ¿cómo podemos crear entornos escolares que habiliten, en lugar de incapacitar, a niños como Luis y adultos como Dylan Lynn?

Esto deja clara nuestra misión: ¿cómo podemos crear entornos en el aula que capaciten a los niños, en lugar de incapacitarlos?

PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

1. ¿Alguna vez has tenido un alumno como Luis? ¿Qué aprendiste de ese alumno?
2. ¿Qué experiencias ha tenido con la discapacidad en su vida? ¿Desde una perspectiva de primera mano? ¿En su familia y amigos? ¿Como profesional? ¿Qué ha aprendido de sus experiencias con la discapacidad que le gustaría que otros profesores supieran?
3. Al leer sobre las diferentes formas de pensar sobre la discapacidad, ¿qué pensaste? ¿Qué modelo te pareció más adecuado? ¿Por qué?

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 2.1 • El concepto de discapacidad

Un recuadro central lleva la leyenda «La discapacidad es compleja». Alrededor del recuadro central se presentan 18 tipos de discapacidad. Se enumeran a continuación.

Ansiedad.

Diabetes.

Enfermedad crónica.

Sensibilidad química.

Parálisis.

Parálisis cerebral.

Sordoceguera.

Ceguera y discapacidad visual.

Sordera y discapacidad auditiva.

Discapacidad intelectual.

Discapacidad del habla y del lenguaje.

Trastorno por déficit de atención con hiperactividad.

Dificultad de aprendizaje en la escritura. También conocida como disgrafía.

Dificultad de aprendizaje en matemáticas. También conocida como discalculia.

Dificultad de aprendizaje en lectura. También conocida como dislexia.

Discapacidades específicas del aprendizaje.
 Enfermedad mental.
 Depresión.

Porcentaje en los niveles básico y avanzado en lectura Gráfico

El gráfico compara cuatro cohortes de datos de alumnos con y sin discapacidades en cuarto curso y alumnos con y sin discapacidades en octavo curso.

Los datos ilustran que los niveles de lectura de los alumnos con discapacidades son inferiores a los de los alumnos sin discapacidades, con un 69 % por debajo del nivel básico en 4.º grado y un 60 % por debajo del nivel básico en 8.º grado.

El conjunto de datos completo se presenta en la siguiente tabla.

Grupo de alumnos	Por debajo del básico	Básico	Competente	Avanzado
Estudiantes con discapacidades, 4.º grado	69	20	9	2
Estudiantes sin discapacidades, 4.º grado	27	35	28	9
Estudiantes con discapacidades, 8.º grado	60	31	8	1
Estudiantes sin discapacidades, 4.º grado	18	43	35	5

Porcentaje en los niveles básico-avanzado en matemáticas Gráfico

El gráfico compara cuatro cohortes de datos de alumnos con y sin discapacidades de cuarto curso y alumnos con y sin discapacidades de octavo curso.

Los datos ilustran que los niveles de matemáticas de los alumnos con discapacidades son inferiores a los de los alumnos sin discapacidades, con un 45 % por debajo del nivel básico en 4.º curso y un 65 % por debajo del nivel básico en 8.º curso.

El conjunto de datos completo se presenta en la siguiente tabla.

Grupo de alumnos	Por debajo del básico	Básico	Competente	Avanzado
Estudiantes con discapacidades, 4.º grado	45	38	16	2

Estudiantes sin discapacidades, 4.º grado	14	41	37	8
Estudiantes con discapacidades, 8.º grado	65	27	7	1
Estudiantes sin discapacidades, 4.º grado	21	40	29	10

CAPÍTULO 3 REPENSAR LAS MATEMÁTICAS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Reevaluar nuestra definición de matemáticas

Aprenderemos de un estudio sobre la dislexia y las matemáticas a nivel universitario

Reconceptualizar el desarrollo matemático como múltiples vías

Comprender que la neurodiversidad puede significar formas inusuales de abordar las matemáticas

DADO QUE ESTE CAPÍTULO trata sobre lo que son las matemáticas, las matemáticas reales, quiero comenzar con una historia que me contó un matemático, Edmund Harriss (**Figura 3.1**). Comienza en Francia, con Edmund viajando en autobús, con la cabeza llena de ideas después de una interesante charla sobre matemáticas. Tuvo una revelación sobre cómo esa charla se relacionaba con otro problema en el que estaba trabajando, sobre el embaldosado de un plano. Estas matemáticas requerían cambiar los métodos diseñados para comprender el espacio en tres dimensiones a cuatro dimensiones. Cuando intentó explicar por primera vez las conexiones entre los temas, sus colegas no entendieron su razonamiento, probablemente porque, como él mismo dijo, «yo todavía no lo entendía».



Figura 3.1 • Edmund, matemático y artista, sosteniendo un juguete matemático de su propia creación.

FUENTE: Asa Harriss

Dos años más tarde, Edmund se encontraba en Japón, trabajando con el mismo grupo de colegas para resolver este mismo problema, encerrado en una habitación con una pizarra blanca. Describió su proceso de la siguiente manera:

Edmund: Una persona se levantaba, hablaba hasta que se atascaba, se sentaba e inmediatamente otra persona tomaba el relevo. Y todo el proceso, básicamente el núcleo del artículo, en unas tres horas, pasó de ser algo desconocido a algo que todos sentíamos que comprendíamos bastante bien. Y luego, dos años más tarde, se publicó un artículo que describía ese resultado.

Rachel: Cuando entraste, ¿solo explicaste tus ideas o escribiste algo en la pizarra? ¿Qué más sucedió?

Edmund: Básicamente, dibujaba bocetos en la pizarra y la comprensión que aporté fue pensar en este problema en un espacio de cuatro dimensiones y ver cómo se relacionaba con... así que, en lugar de fijarse en los valores de la matriz, hay que fijarse en lo que la matriz hace al área.

Un poco más adelante en la entrevista, Edmund empezó a hablar de cómo se ve a sí mismo como matemático.

Edmund: Tengo muchas ideas. De hecho, en ese mismo momento, mi colega japonés dijo: «Me gustas, Edmund, porque la mayoría de tus ideas son malas, pero cuando tienes una buena, realmente vale la pena escucharla. Así que vale la pena escuchar todas las ideas malas para obtener la diferente». Y probablemente soy un poco más lento como matemático que muchos otros.

Rachel: ¿Qué quieres decir con que eres «un poco más lento» que otros matemáticos?

Edmund: En términos de hacer cálculos o simplemente tomar una idea y ver qué significa realmente y cómo funciona... Una vez que tienes la idea, ¿cómo haces toda la manipulación rutinaria de esa idea antes de necesitar otra idea?

Rachel: Me gusta la expresión «manipulación rutinaria». Porque va más allá del cálculo al nivel en el que estás, es como si tuvieras que aplicar cosas que ya existen en matemáticas para ver si funciona, ¿verdad? ... ¿En qué eres bueno en matemáticas?

Edmund: Dar con la idea que te empuja más allá de esa rutina. Así que pensar en cosas, especialmente ideas visuales o espaciales. Cuestionar y hurgar en la rutina para decir cómo expresamos esta idea. Así que se trata de dar con ideas que no están en esa rutina, especialmente cosas relacionadas con imágenes. Y luego, cuando las cosas se pueden traducir en imágenes, tengo mucha facilidad para hacer cosas. Puedo hacer un trabajo inmensamente técnico en imágenes que otros pueden hacer con el lenguaje. ●

REEVALUAR NUESTRA DEFINICIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Desde pequeños se nos hace creer que las matemáticas no son creativas, que son una tarea tediosa. Se nos enseña que son una vocación para unos pocos, y que esos pocos son

un grupo muy reducido de personas que excluye a la mayor parte de la humanidad, excluyendo a las mujeres, a las personas de color y a las personas con discapacidad. Nos enseñan que ser bueno en matemáticas es memorizar los dígitos de pi y ser rápido en la multiplicación. Pocos de nosotros tenemos acceso a la belleza y la creatividad de las matemáticas. No sabía que me encantaban las matemáticas hasta que empecé a enseñarlas y a trabajar con desarrolladores profesionales que me planteaban problemas que me obsesionaban y me intrigaban.

Trabajar con matemáticos también me ha hecho cambiar de opinión, en particular mi trabajo con Edmund Harriss, matemático y artista en activo, actualmente profesor de matemáticas y arte en la Universidad de Arkansas. Edmund es geómetra, lo que significa que estudia las matemáticas de las formas tridimensionales cambiantes. Es conocido por ayudar a desarrollar el campo de la ilustración matemática, conectando las matemáticas con el arte para ayudar a los investigadores a desafiar los límites de la materia. Esto le lleva a pensar en la comunicación matemática en términos generales, especialmente en cómo se conecta con el arte, la creatividad y la neurodiversidad. Edmund es coautor de un libro para colorear matemático (Bellow & Harriss, 2015) y ha desarrollado juguetes matemáticos como los mosaicos de Penrose (<https://bit.ly/46c3V2w>).

Edmund me ha enseñado que las matemáticas pueden ser una vocación creativa, artística y alegre; que las matemáticas consisten en encontrar lo que te gusta hacer y hacerlo; y que las matemáticas no son solo para aquellos que son buenos en lo que importa en la escuela primaria: memorizar. También me ha enseñado que el desarrollo matemático no es una escalera, no es paso a paso, sino una red mucho más compleja de conexiones y conceptos, y que a veces las partes más simples de las matemáticas parecen las más difíciles. Además, a Edmund le diagnosticaron dislexia cuando era niño y vivía en Inglaterra. Así que, al explorar su historia, podemos explorar el potencial radical de las matemáticas para la creatividad y la alegría de las mentes neurodiversas.

Piénsalo

Piensa en esta historia de Edmund, una saga internacional de descubrimientos matemáticos, a lo largo de cuatro años y tres continentes. Teniendo esto en cuenta, ¿qué son las matemáticas? ¿Cómo hacemos matemáticas? ¿Cómo se compara esto con las matemáticas que enseñamos en la escuela?

El trabajo de Edmund trata sobre la innovación, sobre la creación de nuevos conocimientos, en este caso, encontrar una forma de cubrir un plano bidimensional adaptando las matemáticas de espacios de cuatro, cinco o más dimensiones (**véase la figura 3.2**). Para ello se necesita perspicacia, lo que Edmund denomina «trabajo técnico en imágenes». También es necesario que resista la crítica de la manipulación rutinaria; en otras palabras, ¿funciona esta idea con el resto de las reglas matemáticas que hemos creado?



Figura 3.2 • Mosaicos de Penrose para juegos matemáticos diseñados por Edmund

FUENTE: Reproducido con permiso de Edmund Harriss.

Estas matemáticas tan complejas se realizan con mayor frecuencia en equipos, con personas que se reúnen para pensar juntas sobre un problema en el que cada una ha pensado individualmente. Juntas, compartiendo nuevas ideas, cada una habla hasta que, como señaló Edmund, «se quedan atascadas» y entonces habla la siguiente. Su colaboración se sustenta en las imágenes de la pizarra mientras hablan. Así pues, si queremos definir las matemáticas «reales», tal y como las describe Edmund, son creativas, multimodales y colaborativas. Quedarse atascado es una parte natural del proceso, y salimos de ese atolladero hablando de las ideas con los demás.

PARTICIPAR EN LAS PRÁCTICAS DE LAS MATEMÁTICAS REALES

Una innovación importante en la enseñanza de las matemáticas ha sido intentar conectar mejor las matemáticas escolares con el campo académico de las matemáticas en sí. Quizás la innovación más importante para conectar las matemáticas escolares con las matemáticas como campo sea la parte de los Estándares Estatales Comunes (CCSS) conocida como Estándares de Práctica Matemática, más conocidos como SMP (Centro de Mejores Prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores y Consejo de Directores de Escuelas Estatales, 2010). Estos estándares se desarrollaron gracias al trabajo de educadores matemáticos y matemáticos, que utilizaron la investigación y sus propias experiencias para diseñar un conjunto de prácticas utilizadas por los matemáticos investigadores. Aprender matemáticas incluye tanto el contenido (lo que se aprende) como las prácticas (lo que se aprende a hacer). Para muchos niños, las matemáticas escolares son solo contenido. El objetivo son las calificaciones y las notas altas, que dependen de lo que el alumno sea capaz de memorizar.

Este enfoque puede causar varios problemas. Por ejemplo, los estudiantes que son buenos en matemáticas en la escuela pueden tener problemas en la universidad porque las matemáticas se convierten en un campo más creativo y abierto, donde el trabajo es más similar al que realizan Edmund y sus colegas (Boaler y Greeno, 2000). Es posible que estos estudiantes tengan los conocimientos de contenido, pero tal vez no tengan los hábitos mentales necesarios para tener éxito en matemáticas avanzadas.

Estándares para la práctica matemática

1. Entender los problemas y perseverar en su resolución.
2. Razonar de forma abstracta y cuantitativa.
3. Construir argumentos viables y criticar el razonamiento de los demás.
4. Modelar con matemáticas.
5. Utilizar las herramientas adecuadas de forma estratégica.
6. Prestar atención a la precisión.
7. Buscar y aprovechar la estructura.
8. Busca y expresa la regularidad en el razonamiento repetido.

El mayor problema es para la mayoría. Las matemáticas que solo se basan en la memorización son menos atractivas para los estudiantes, tienden a provocar aburrimiento y hacen que los estudiantes sean menos felices (por ejemplo, Sengupta-Irving y Enyedy, 2015). ¿Cómo podemos esperar que los estudiantes perseveren en unas matemáticas aburridas, repetitivas y que permiten poca iniciativa y participación?

Piénselo

Tómese un momento para volver a mirar los SMP (en el recuadro anterior). ¿En cuáles de ellos se involucró Edmund al pensar en revestir una esfera?

Sin duda, Edmund aplicó la SMP 1: Dar sentido a los problemas y perseverar en su resolución. Destacar en matemáticas al más alto nivel implica dedicar cuatro años a resolver un problema matemático. Los matemáticos pueden trabajar durante décadas en un problema y no resolverlo.

Edmund incluso se identifica a sí mismo como lento, no para menospreciarse, sino para tener claras sus fortalezas y sus dificultades. Esta es una de las ventajas de la perspectiva de la neurodiversidad: no se trata de ser bueno o malo en matemáticas, sino de ser fuerte en algunos aspectos, tener dificultades en otros y aprender a adaptarse en consecuencia.

Edmund también destaca en SMP 2: Razona de forma abstracta y cuantitativa. Este SMP trata sobre el pensamiento matemático, lo que significa pensar en situaciones concretas, representativas y abstractas, así como en diferentes tipos de representaciones. Aquí, Edmund y sus colegas están ampliando las matemáticas de las dimensiones, lo que necesariamente les exige establecer conexiones entre conceptos y pensar tanto de forma abstracta (ecuaciones) como concreta (el modelo físico de la esfera en expansión).

También veo pruebas del SMP 3: Construir argumentos viables y criticar los argumentos de los demás. Edmund y sus colegas trabajan tanto solos como juntos. Cuando trabajan por separado, se comunican por escrito, y cuando trabajan juntos, como aquel día en Francia, hablan, comparten y critican el pensamiento de los demás. El producto final de su trabajo es un artículo matemático (Arnoux et al., 2011).

UN ESTUDIO DE INVESTIGACIÓN SOBRE LA DISLEXIA Y LAS MATEMÁTICAS

La entrevista entre Edmund y yo formaba parte de nuestro proyecto de investigación (Lambert y Harriss, 2022). A ambos nos interesaba conocer más sobre los procesos de pensamiento y las carreras profesionales de los matemáticos disléxicos. Edmund y yo entrevistamos a cinco matemáticos investigadores que se identificaban como disléxicos (incluido el propio Edmund). Todos trabajaban en universidades y se centraban en las siguientes áreas matemáticas: análisis real, geometría tridimensional, topología y topología algebraica. Se trataba de un estudio exploratorio, por lo que no pretendemos afirmar que ahora tengamos respuestas definitivas sobre las fortalezas o los retos de los matemáticos disléxicos, pero lo que descubrimos revela algunos patrones interesantes que creemos que son muy útiles para quienes enseñan matemáticas a estudiantes con dislexia.

Teniendo en cuenta lo mucho que la dislexia —la dificultad para aprender a leer— puede afectar a la etapa escolar, ¿cómo llegaron cada uno de ellos a ser matemáticos? Las historias de vida de estos matemáticos investigadores describen un camino indirecto hacia la investigación matemática. Describen barreras que podrían haber limitado su proceso, en particular las clases de matemáticas centradas en la memorización. Todos los participantes señalaron que avanzaron en matemáticas una vez que llegaron a un punto en el que se sintieron completamente fascinados por los problemas, en la mayoría de los casos, un conjunto de problemas visuales y espaciales que resolver.

Algunos de nuestros participantes estaban preocupados por ser reconocidos y quizás penalizados en sus departamentos si se sabía que eran disléxicos. Por esa razón, describimos a los matemáticos con nombres neutros en cuanto al género y pronombres neutros, y no relacionamos los detalles sobre sus especialidades con sus citas. Esta preferencia por permanecer en el anonimato a pesar de su enorme éxito nos recuerda lo perjudiciales que son las concepciones deficitarias de la discapacidad, incluso para quienes se encuentran en la cima de las matemáticas. De los cinco matemáticos, dos eran mujeres. A continuación, veamos algunos resultados de nuestro estudio.

Las matemáticas requieren resiliencia

Los participantes disléxicos en nuestra investigación señalaron que superar los retos de la dislexia les hizo más resilientes, lo que se convirtió en una ventaja considerable para ellos en las matemáticas avanzadas. Cuando se les preguntó cuál era la ventaja de la dislexia, un matemático al que llamaremos Dakota respondió: «La resiliencia, supongo. Simplemente ser capaz de superar cosas que no son necesariamente las más fáciles para ti». Los participantes señalaron que el éxito en las matemáticas requiere mucho trabajo. Dado que las matemáticas se vuelven difíciles para todos en algún momento de sus estudios, saber qué hacer cuando eso ocurre es una ventaja para cualquier matemático.

Dado que las matemáticas se vuelven difíciles para todos en algún momento de su aprendizaje, comprender qué hacer cuando eso ocurre es una ventaja para cualquier matemático.

Pensamiento multimodal

Las matemáticas son multimodales. Edmund me enseñó bastante sobre la diferencia entre las matemáticas centradas en el álgebra, que son principalmente simbólicas, y las matemáticas del espacio o la geometría. A menudo ve a matemáticos con inclinación hacia una u otra, y muchos problemas matemáticos fundamentales tratan de establecer las conexiones entre ambas.

En nuestro estudio, encontramos una fuerte inclinación hacia el pensamiento visual-espacial en los matemáticos disléxicos. Cuatro de los cinco participantes se identificaron como pensadores matemáticos visuales y/o geométricos. Algunos de sus comentarios:

«Aprendo primero a través de la geometría, pensando a través del espacio».

«Toda mi memoria es visual, es como reproducir pequeños fragmentos de una película».

«Soy un pensador detallista y visual. No me interesan los detalles a menos que tenga una imagen de lo que creo que estoy resolviendo. Pero, una vez que tengo una imagen de lo que creo que debería estar pasando, los detalles se vuelven interesantes... No es al revés».

Otra conexión entre los matemáticos disléxicos era la importancia de la intuición en su proceso de resolución de problemas, incluyendo lo difícil que a veces resulta para los colaboradores matemáticos:

«Hablo en fantasmas y nieblas. Mi cerebro parece sentirse muy, muy cómodo simplemente lanzando ideas. Es realmente muy flexible. Y así, tengo la sensación de que algo es cierto, o que algo que quiero, que necesito, está ahí. Y entonces a mi cerebro realmente no le molesta el hecho de que algunas ideas no funcionen, simplemente lanza montones y montones de ideas y divaga. Y eso vuelve locos a los coautores, porque dicen: "Ah, ¿ya veo? Esa idea no funciona". Y eso no me frena ni un ápice. Mi cerebro tiene otras cinco ideas extrañas, dos de las cuales se pueden descartar inmediatamente, y las otras tres requieren tiempo».

Esta cita también concuerda con la forma en que Edmund describió sus colaboraciones, en las que sentía que su punto fuerte era aportar ideas innovadoras.

Varios participantes describieron cómo las matemáticas eran imposibles sin elementos visuales. Un participante llamado Atlas describió lo difícil que era cuando sus colegas

matemáticos en las conferencias solo hablaban de matemáticas, sin ningún elemento visual.

Atlas: Esto incluso ocurre cuando estoy con amigos matemáticos y ellos expresan un argumento. No hay pizarra y dicen: «Tú haces esto y luego tú...». Sí, no necesariamente voy a seguir el argumento. Pero luego vuelvo a mi habitación [de hotel] y recuerdo lo suficiente de lo que intentaban decir como para entenderlo. Y no me importa; no tengo que ser tan ingeniosa como algunos de mis colegas matemáticos, y no me importa.

Rachel: ¿Entonces es muy diferente para ti si hay papel o si hay una pizarra?

Atlas: Sí, si puedo visualizar las cosas, me va mucho mejor.

Si a un matemático profesional le resulta difícil seguir las matemáticas únicamente a través del lenguaje verbal, podemos suponer que para muchos niños es excepcionalmente difícil.

Las matemáticas son colaborativas

En la historia de Edmund, podemos ver cómo el descubrimiento matemático tiene que ver con la colaboración y la comunicación. Otros participantes en la investigación también destacaron este aspecto de las matemáticas. Para varios de ellos, la colaboración a nivel de posgrado es lo que les atrajo de las matemáticas como campo. Uno de ellos utilizó el término «sentirse cómodo» para describir la colaboración en su programa de máster, que le resultó tan interesante y enriquecedora que decidió continuar hasta obtener un doctorado.

La colaboración es fundamental para resolver problemas matemáticos complejos, ya que a menudo se necesitan múltiples perspectivas para desarrollar ideas y criticarlas hasta que estén bien desarrolladas. Vimos este proceso en acción en la historia de Edmund sobre la creatividad matemática, tan estrechamente relacionada con la colaboración.

Dificultades con la memorización

Cuando se les pidió que recordaran su etapa escolar, los participantes en la investigación comentaron que no tuvieron ningún reto particular con los conceptos, pero sí muchos problemas con la memorización, en particular con las tablas de multiplicar y/o la memorización de procedimientos matemáticos. Dakota nos dijo:

Nunca se me ha dado bien memorizar cosas, al igual que no podía memorizar cómo se escribían las palabras, tampoco podía memorizar datos matemáticos. Así que prestaba atención en clase y tenía profesores tan buenos que deducían todo. Y yo descubrí cómo deducir todo lo que necesitaba saber.

Otro señaló que su madre les enseñó las tablas de multiplicar utilizando un conjunto más reducido de datos memorizados, concretamente los cuadrados, y luego les animó a

construir ecuaciones a partir de la propiedad distributiva de los datos conocidos. Los participantes señalaron la dificultad de cualquier tipo de memorización «sin estructura». Edmund dijo:

Esa es una de las razones por las que soy más lento. Tengo muy buena memoria para los datos relacionados entre sí. No puedo recordar los números de teléfono en absoluto. Aprender idiomas extranjeros era lo único que odiaba de la escuela, porque tienes una larga lista de palabras que no tienen ninguna relación entre sí. Es decir, memorización sin estructura. Así que memoricé la estructura.

Atlas nos contó que tenían un historial de comprender los «conceptos» de las matemáticas y de tener dificultades con «los detalles». Cuando les preguntamos a qué se referían con «detalles», nos contaron una historia sobre cómo se les juzgaba negativamente por no memorizar las tablas de multiplicar en la escuela primaria:

Yo podía explicar con un dibujo por qué nueve por cinco era 45, y mis amigos podían decir que era 45, pero no sabían explicar por qué. Y me pareció muy molesto que alguien que solo memorizaba ese número fuera más valorado que yo, que entendía por qué esa era la respuesta correcta. Y siempre ha sido un problema. Pero me parece que saber por qué algo es cierto es mucho más importante que saber que es cierto.

No solo era muy difícil memorizar sin estructura, sino que a los participantes se les pedía que realizaran esta tarea bajo presión de tiempo, lo que la hacía imposible. Edmund, que asistió a la escuela en el Reino Unido, señaló:

El cálculo de secundaria en Estados Unidos... Creo que no sería matemático si lo hubiera estudiado, porque se centraba mucho en cosas rápidas y técnicas... Y yo cometo muchos errores al hacer cálculos, y cuando tienes un examen de opción múltiple diseñado para detectar todos tus errores, habría sacado muy malas notas.

FORTALEZAS Y RETOS DE LA DISLEXIA Y LAS MATEMÁTICAS

Los estudiantes con dificultades de aprendizaje (DA) y/o dislexia son variables, con conjuntos individuales de fortalezas y desafíos. Sin embargo, si recopilamos los que se han investigado en estudios sobre este grupo de estudiantes, podemos hacer algunos análisis sobre cómo las fortalezas y los desafíos pueden influir en las matemáticas.

Dificultades asociadas a la LD/dislexia	Fortalezas asociadas con la LD/dislexia
--	--

Procesamiento del lenguaje Procesamiento fonológico Memoria para hechos y procedimientos inconexos Memoria de trabajo Funcionamiento ejecutivo (planificación, organización)	Pensamiento visual-espacial Creatividad Búsqueda de patrones Razonamiento interconectado Búsqueda exploratoria
--	--

Piénsalo

¿Qué significa esta lista de posibles fortalezas y desafíos para las matemáticas? ¿Qué viste reflejado en las historias de los matemáticos disléxicos? ¿Qué tipo de actividades podrían ser un desafío en nuestras clases de matemáticas? ¿Qué tipo de actividades podrían aprovechar las fortalezas de los estudiantes?

Fortalezas y desafíos

Nuestra colaboración (entre Edmund y yo) tiene como objetivo aprovechar la comprensión de la dislexia y las matemáticas en la investigación matemática para crear mejores condiciones de aprendizaje para los estudiantes disléxicos en entornos de educación primaria y secundaria. Podemos ofrecer matemáticas multimodales y apoyar los retos relacionados con la memorización. Los estudiantes con estos retos PUEDEN desarrollar fluidez con las tablas de multiplicar mediante estrategias de razonamiento que aprovechan sus fortalezas con razonamientos interconectados, como exploramos en el capítulo 10. Podemos crear las condiciones para apoyar las matemáticas como una vocación para todos nuestros estudiantes.

Soñamos con explorar las formas matemáticas de los matemáticos con otras discapacidades. Aunque las personas con autismo son menos propensas a asistir a la universidad que las personas sin autismo, las que lo hacen son más propensas a elegir campos STEM (Wei et al., 2013). Sin embargo, pocas investigaciones han documentado las fortalezas del autismo en las matemáticas. Un estudio (Truman, 2017) analizó la resolución de problemas matemáticos de tres estudiantes universitarios con autismo, ilustrando sus fortalezas en la resolución de problemas paradójicos. El investigador también señaló la variedad de estilos de resolución de problemas, ya que un estudiante prefería claramente las estrategias visuales y geométricas, y los otros dos preferían las estrategias numéricas. Queda mucho por aprender sobre las fortalezas de las personas con autismo en las matemáticas.

Los matemáticos ciegos han sido importantes innovadores matemáticos, entre ellos el prolífico matemático Leonhard Euler (1707-1783). Jackson (2002) trazó el perfil de Bernard Morin, a quien se le desanimó a seguir la matemática debido a su ceguera, pero que contribuyó a las teorías de la inversión esférica, o cómo las esferas tridimensionales pueden dar la vuelta. Para comunicarse con sus colegas videntes, Morin creó modelos de arcilla de las formas que imaginaba en su mente. Afirmó que su forma de ver —en su mente y con sus manos— le permitía ver tanto el interior como el exterior de un objeto al mismo tiempo.

Investigaciones recientes sobre matemáticos ciegos han descubierto que procesan las matemáticas en la misma zona que los matemáticos videntes: una zona generalmente asociada con la visualización (corteza occipital; Amalric et al., 2018). Este hallazgo incluyó a un matemático ciego de nacimiento, lo que sugiere que utilizamos esta parte del cerebro no solo para ver, sino también para imaginar objetos en el espacio.

Jackson (2002) describió a varios matemáticos ciegos que trabajaban en geometría, además de Morin. Pero otros matemáticos ciegos tenían formas diferentes de pensar, como Lawrence Baggett, conocido por su talento para retener y manipular largas secuencias numéricas en su mente.

Una cuestión fundamental para los estudiantes ciegos de matemáticas es la creación de herramientas que permitan el acceso a las matemáticas a aquellas personas con discapacidad visual (Ahmed y Chao, 2018). Estos autores insisten en que el acceso a las matemáticas no es solo el acceso a versiones alternativas de elementos visuales, como un libro de texto, sino también el acceso a la colaboración matemática real. No basta con ser capaz de imaginar lo que ven tus colaboradores, sino que es necesario ser capaz de manipular colectivamente las representaciones para poder colaborar matemáticamente.

Repensar la lentitud

Durante mucho tiempo se ha asumido que las matemáticas son una materia en la que la velocidad es sinónimo de éxito. Sin embargo, en nuestro estudio hemos escuchado a varios matemáticos describirse a sí mismos como lentos. He escuchado lo mismo de los estudiantes de secundaria neurodiversos que he entrevistado. Una chica de la clase de Luis (véase el capítulo 2), Desi, que tenía una etiqueta de LD y estaba identificada con un trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH), me dijo que era «lenta» en matemáticas. No lo decía para menospreciarse, sino para explicar que necesitaba más tiempo. Como firme defensora de sí misma y de otros estudiantes con discapacidades, Desi me hizo saber que en su clase debería haber espacio para aquellos que eran más lentos, y que la velocidad no equivalía a la competencia matemática (Lambert, 2019).

Perspectiva del educador: replantearse la lentitud

La siguiente narración procede de una entrevista que mantuve con Berkeley Everett (**Figura 3.3**), creador de Math Flips y Math Visuals (mathvisuals.wordpress.com). Al hablar de matemáticas y neurodiversidad, me contó que se le había identificado como una persona con «procesamiento lento». Le pedí que reflexionara sobre su opinión actual acerca de la relación entre esta forma de pensar y su pasión por las matemáticas.



Figura 3.3 • Berkeley, educador matemático

FUENTE: Natalia Kaminska-Palarczyk

SOY una «procesadora lenta». Las matemáticas que se enseñaban en la escuela estaban completamente desconectadas de mi curiosidad, creatividad e imaginación. Ahora, como entrenadora de matemáticas y diseñadora de herramientas digitales, estoy empezando a considerar la forma en que utilizamos el tiempo y el espacio en las clases de matemáticas para incluir o excluir a personas como yo.

El procesamiento lento es un superpoder. Me da el deseo y la paciencia para analizar una idea desde muchos ángulos. Tiro de los cabos sueltos, juego con los parámetros y lo doblo hasta que se rompe.

Consideremos 6×7 . ¿Ve dónde aparece en «Twinkle Twinkle Little Star»? ¿Ve cómo el 7 suele ser una abreviatura de una proporción? ¿Ve cómo es similar a $n(n + 1) = n^2 + n$? Con suficiente espacio y tiempo, nuevas conexiones flotan en mi mente.

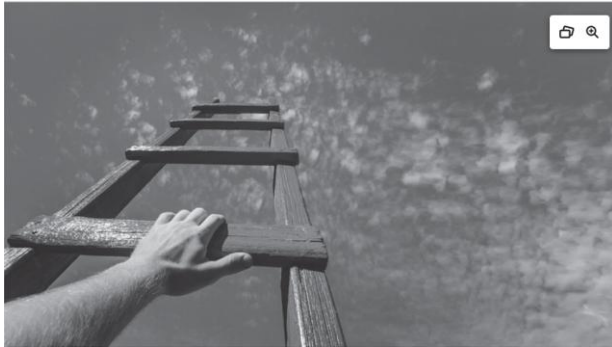
Puedes liberar el potencial de estudiantes como yo. Plantea problemas con una introducción atractiva y una oportunidad para la generalización, como: «¿Qué patrones observas cuando multiplicas por 4?». Descubre lo que nos gusta y en qué destacamos. La música es mi patio de recreo matemático secreto, algo que me gustaría que mis profesores supieran. ¿Qué pasión y potencial sin explotar pueden tener tus «procesadores lentos»? ¿Cómo podrían contribuir a una comprensión más rica para todos? ●

Piénsalo

¿Qué aprendes de la historia de Berkeley? ¿Cómo podemos aprovechar las ventajas de los procesadores lentos, tal y como él sugiere?

NEURODIVERSIDAD Y DESARROLLO MATEMÁTICO

Las matemáticas en sí mismas son creativas, colaborativas y multimodales, como hemos visto en nuestro estudio sobre los matemáticos. ¿Qué hay del desarrollo matemático, o cómo conceptualizamos el aprendizaje de los conceptos matemáticos por parte de los niños? Yo diría que la neurodiversidad desafía las nociones tradicionales del desarrollo.



FUENTE: [istock.com/Sergey Tinayakov](https://www.istock.com/Sergey-Tinayakov)

Entender el conocimiento matemático como un conjunto de subhabilidades en una trayectoria lineal, una escalera que asciende al cielo, es probablemente la forma más común de entender el aprendizaje matemático, como discute Paul Lockhart (2009). Utilizando esta metáfora, los niños que tienen dificultades con algunas de las habilidades en los peldaños inferiores de la escalera no pueden/no deben progresar hasta que dominen los «conceptos básicos».

La neurodiversidad desafía directamente las ideas lineales del desarrollo, como la escalera. En mi trabajo con profesores de educación especial, a menudo oigo hablar de alumnos que son inusuales en su desarrollo matemático. Durante un curso de desarrollo profesional, una profesora de educación especial con experiencia me preguntó: «¿Qué hago con un niño que no sabe sumar y restar en cuarto curso, pero que puede multiplicar números de dos dígitos?». La sala estaba llena de educadores especiales que asintieron con la cabeza y contaron sus propias historias sobre alumnos que parecían tener dificultades con los conceptos básicos, pero que podían hacer matemáticas más complejas.

Los alumnos de los que hablaba tenían un diagnóstico de autismo. A menudo he oído el término «habilidades fragmentadas» para describir las habilidades de las personas con autismo cuando dichas habilidades no son consistentes en matemáticas (u otras áreas). Desgraciadamente, el término puede utilizarse como una forma de menospreciar lo que el alumno PUEDE hacer: «Solo es una habilidad fragmentada». Pero, ¿y si estas habilidades inusuales de alto nivel nos están dando pistas de que hay una forma diferente de pensar en este alumno? ¿Quizás la multiplicación es más fácil para el niño que la suma y la resta? ¡Para muchos niños lo es! ¿Quizás el niño aprendió la multiplicación en un contexto especialmente propicio, o de un adulto especialmente comprensivo, y por eso la recordó? ¿O quizás el niño se aburre con la suma y la resta?

Según mi experiencia, los alumnos neurodiversos suelen tener trayectorias de aprendizaje especialmente inusuales. A menudo, lo más fácil les resulta lo más difícil. He conocido a muchos alumnos que no saben contar objetos de forma fiable, pero que pueden trabajar con números de formas más sofisticadas. He trabajado con alumnos con discapacidad intelectual que entienden los conceptos que hay detrás del conteo (cardinalidad y correspondencia uno a uno), pero que tienen dificultades para recordar el orden de los

números. También he trabajado con estudiantes con discapacidad intelectual que podían contar hasta el infinito (si se pudiera), pero que tenían dificultades con los conceptos de conteo. Conocer la secuencia numérica requiere memorización, mientras que comprender la correspondencia uno a uno y la cardinalidad es una comprensión conceptual. La variabilidad de los estudiantes en estas tareas puede estar relacionada en parte con el tipo de actividad matemática que prefieren, además de sus experiencias previas con el conteo, todo ello dentro de su conjunto particular de fortalezas y desafíos relacionados con su neurodiversidad.

Según mi experiencia, los alumnos neurodiversos suelen ser especialmente inusuales en sus trayectorias de aprendizaje.

La neurodiversidad tiende a ayudarnos a notar estas diferentes trayectorias, pero la variabilidad en la forma en que aprendemos incluso algo tan fundamental como el conteo existe en TODOS nuestros estudiantes. Utilizando datos de 478 entrevistas con estudiantes de preescolar que realizaban conteos, Nick Johnson y sus colegas (2019) descubrieron que existía una variabilidad significativa en la forma en que los estudiantes aprendían a contar objetos. Los investigadores dieron a los estudiantes tres tareas de entrevista diferentes que evaluaban el conteo de diferentes maneras (véase el recuadro: Tres tareas de conteo).

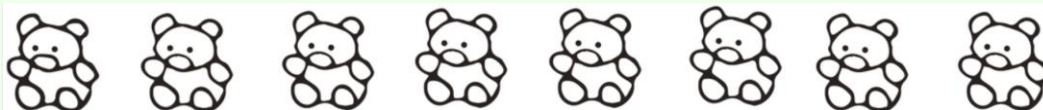
Tres tareas de conteo

1. Contar en voz alta

El entrevistador pide al niño que cuente lo más alto que pueda empezando por 1 (sin objetos). El alumno puede contar en el idioma que prefiera. Si el alumno deja de contar antes de cometer un error, el entrevistador puede preguntarle si puede seguir contando.

2. Contar osos

El entrevistador coloca ocho ositos en una fila ordenada y le pregunta al alumno: «¿Cuántos ositos hay?». Después de que el alumno haya contado, incluso si ha dicho un número final, el entrevistador vuelve a preguntar: «¿Cuántos ositos hay?». Tome nota de (a) el uso que hace el alumno de los nombres de los números, (b) el uso que hace el alumno de la correspondencia uno a uno y (c) la cardinalidad. Una forma de evaluar la cardinalidad es si el alumno parece seguro de que el último número que ha contado es el número de ositos. Si utiliza esta tarea, puede emplear cualquier tipo de objeto para que los alumnos cuenten, pero todos los objetos deben ser iguales (en tamaño y color).



3. Contar centavos

El entrevistador vierte 31 centavos delante del niño en una pila deliberadamente desorganizada. A continuación, se le pregunta al niño: «¿Cuántos centavos hay?». Después de que el alumno haya contado, incluso si ha dicho un número final, el

entrevistador vuelve a preguntar: «¿Cuántos centavos hay?». Tome nota de (a) el uso que hace el alumno de los nombres de los números, (b) el uso que hace el alumno de la correspondencia uno a uno y (c) la cardinalidad. Una forma de evaluar la cardinalidad es si el alumno parece seguro de que el último número que ha contado es el número de centavos. Si utiliza esta tarea, puede utilizar cualquier tipo de objeto para que los alumnos cuenten, pero, de nuevo, mantenga los objetos iguales.



Piénselo

Piense en estas tres tareas. ¿En cuál cree que tendrían más éxito los alumnos de preescolar? ¿Por qué? Si puede, le animo a que se detenga y le dé tareas similares a un niño que todavía está aprendiendo a contar.

Los investigadores buscaban pruebas de la comprensión de los alumnos sobre la secuencia numérica (hasta qué número puede contar en voz alta un alumno), la correspondencia uno a uno (asignar un número a un objeto) y la cardinalidad (comprender que el último número del recuento describe la cantidad del conjunto) (para más información, véase «Desentrañar una idea fundamental: el desarrollo del conteo» en la página 126). En cuanto a estas tres tareas, creo que la mayoría de nosotros daríamos por sentado que los alumnos serían capaces de contar hasta el número más alto cuando cuentan en voz alta. Probablemente también daríamos por sentado que solo los niños que eran capaces de contar correctamente los ositos serían capaces de contar los centavos.

Los resultados reales de su investigación mostraron que los niños estaban desarrollando este importante conocimiento sobre el conteo de manera no lineal. Algunos niños mostraron una correspondencia uno a uno en la tarea de los centavos, pero no en la de los osos. Otros hicieron lo contrario. Otros niños mostraron evidencia de cardinalidad en la tarea de los centavos y no en la de los osos, y otros hicieron lo contrario. Algunos niños contaron más

lejos en la primera tarea y otros cuando contaban centavos. Al observar las tres tareas, los niños mostraron una gran variabilidad en el desarrollo de los tres principios del conteo. Algunos tenían una secuencia numérica sólida, pero dificultades con la cardinalidad. Otros comprendían la cardinalidad, pero tenían un conocimiento limitado de la secuencia numérica.

Si el desarrollo matemático fuera una escalera, podríamos suponer que estos tres principios de conteo siempre serían secuenciales; en otras palabras, que primero todos los niños aprenderían la secuencia de conteo, luego todos desarrollarían la correspondencia uno a uno y, finalmente, todos comprenderían la idea más abstracta de la cardinalidad. Y eso era cierto para algunos estudiantes, pero no para todos. Sin embargo, a los educadores se les suele enseñar el desarrollo temprano de los números como si existieran secuencias fijas para que los alumnos desarrollaran su comprensión, normalmente que lo primero es conocer la secuencia numérica. A veces, las ideas sobre la progresión del aprendizaje pueden convertirse en pequeñas escaleras rígidas.

Este estudio en particular no recopiló ningún dato sobre las categorías de discapacidad de los alumnos, ya que se seleccionó a los alumnos al azar en cada aula de preescolar. Pero el estudio nos recuerda que todos los alumnos son variables en cuanto a la forma en que aprenden a contar. Quizás algunos de los alumnos que tuvieron una trayectoria inusual en el aprendizaje del conteo eran neurodiversos, pero ciertamente no todos. Sin embargo, la neurodiversidad es útil para cuestionar nuestra comprensión del desarrollo como algo lineal, como una escalera. Aceptar a los alumnos neurodiversos en nuestras aulas de matemáticas significa ver las posibilidades de lo que pueden hacer, no solo sus dificultades. Significa apoyar a los alumnos para que se involucren en las matemáticas de su nivel (¡o más allá!), mientras trabajan en los conceptos más importantes que necesitan.

De hecho, los alumnos no se desarrollan a menos que se les planteen problemas desafiantes. Zhang y sus colegas (2014) descubrieron que los alumnos con dificultades de aprendizaje matemático solo desarrollaban una estrategia más compleja para la multiplicación cuando se les planteaban problemas de mayor magnitud: los alumnos solo crecen cuando se les plantea un reto, incluidos los alumnos neurodiversos. Podemos utilizar los estándares no como una escalera que frena a los alumnos, sino como un mapa hacia un panorama en el que nuestro objetivo fundamental es proporcionar acceso al trabajo de su nivel y, a través de ello, una identidad como pensadores matemáticos. La metáfora de un panorama de aprendizaje, de hecho, puede ayudarnos a ver que todos los alumnos tienen formas únicas de abordar las matemáticas (Fosnot, 2010).

Los estudiantes solo crecen cuando se les plantea un reto, incluidos los estudiantes neurodiversos.

En resumen, en este capítulo hemos explorado cómo la dislexia/LD, la categoría de discapacidad más extendida en nuestras escuelas, puede estar relacionada con fortalezas en matemáticas al más alto nivel, como el pensamiento visual complejo y la intuición matemática. Los adultos disléxicos con los que Edmund y yo hablamos describen cómo se interesaron por las matemáticas una vez que las vieron como un campo creativo, visual y

colaborativo. Como profesores de matemáticas, podemos partir de las fortalezas de los estudiantes, apoyándonos en el tipo de retos visuales que muchos de ellos disfrutan.

Cada uno de los matemáticos disléxicos también señaló que tenían dificultades importantes en matemáticas, como la memorización de datos inconexos tal y como se enseñaba en las escuelas. Desarrollar la comprensión matemática a través de la «estructura», como señala Edmund, es la forma de lograr una comprensión duradera. Las matemáticas basadas en la memorización son una barrera para estos alumnos. Esto me lleva a preguntarme: ¿cuántos alumnos como Luis, del capítulo 2, con formas poco comunes de pensar matemáticamente, se ven frenados en matemáticas debido a la memorización?

PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

1. ¿Cuáles han sido tus experiencias con las matemáticas como estudiante? ¿Has tenido oportunidades de participar en matemáticas desafiantes y atractivas? ¿Qué te hace «sentir cómodo» resolviendo problemas matemáticos complejos?
2. Pensando en las experiencias de estos matemáticos disléxicos, ¿qué implicaciones podría tener esto para sus alumnos con LD/dislexia? ¿Cómo podría diseñar a partir de los puntos fuertes de los alumnos?
3. ¿Qué metáfora sobre el desarrollo matemático le resulta más significativa? ¿Cómo afectan estas diferentes metáforas a nuestro trabajo como profesores?

CAPÍTULO 4: Más allá de la dicotomía entre la investigación y la instrucción explícita

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Conoceremos la clase inclusiva de octavo grado del Sr. Jay y resolveremos una tarea de patrones visuales.

Iremos más allá de los debates simplistas sobre la investigación frente a la enseñanza explícita.

Desarrollaremos la comprensión de la investigación en educación especial y educación matemática

A MEDIDA QUE LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO GRADO entraban en el aula del Sr. Jay, este les entregaba una carta a cada uno. Al entrar en un aula portátil y luminosa con pizarras blancas que cubrían dos lados completos de la clase, los estudiantes se dirigieron hacia la mesa con la carta que coincidía con la suya (**Figura 4.1**).



El Sr. Jay se colocó delante de la pizarra y saludó a su clase. Su actitud era amistosa y modesta. Les dijo que iban a realizar una tarea de patrones visuales, y algunos alumnos sonrieron, uno incluso soltó un «sí» en voz baja. Se nota que ya han hecho este tipo de tarea antes. El Sr. Jay dio unas breves instrucciones: «Aquí tenéis los cuatro primeros términos de la secuencia. Vuestra tarea consiste en averiguar cómo funciona este patrón. ¿Cuál sería el siguiente término? ¿Cuántos bloques serían? ¿Podéis encontrar una forma de averiguar el número de bloques para cualquier término?».

Pruébal

Antes de ver el trabajo de los alumnos, dedique un tiempo a jugar con este problema usted mismo (véase la figura 4.2).

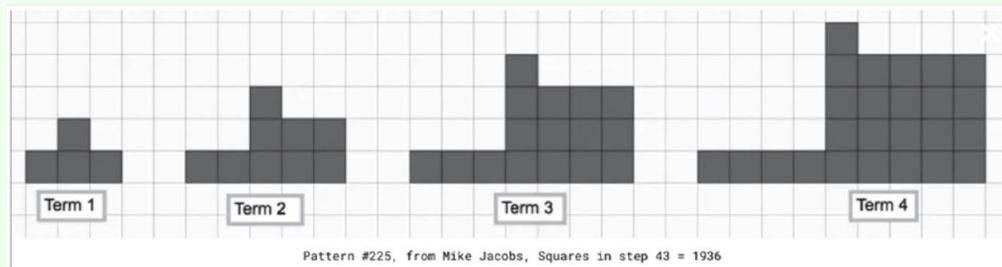


Figura 4.2 • Patrón n.º 225

FUENTE: Reproducido con permiso de Fawn Nguyen ([VisualPatterns.org](https://www.visualpatterns.org)).

¿Cuántos bloques hay en el término 5? ¿En el término 10? ¿En el término 43? ¿Puedes escribir una ecuación para el número de bloques en cualquier término? Por favor, no te saltes este problema porque parece muy alejado de tu nivel académico. Se trata de formas maravillosamente ricas de involucrar a los niños (¡y a los adultos!) en las matemáticas del álgebra. ¡Inténtalo!

Y antes de terminar, ¿has visto el patrón en los trozos? Si tuvieras que describir con palabras cómo cambia el patrón, ¿qué dirías? ¿Se te ocurren varias formas de ver este patrón?

Esta tarea proviene del sitio web Visual Patterns, creado por la educadora matemática Fawn Nguyen. Su sitio web (<https://www.visualpatterns.org/>) es una colección de tareas visuales similares que hacen que los estudiantes piensen en variables y equivalencias. El Sr. Jay ha utilizado muchas de estas tareas con sus alumnos de secundaria. Considera que son tareas de bajo nivel y alto rendimiento, lo que significa que todos los niños pueden encontrar una forma de empezar y los alumnos se ponen manos a la obra de inmediato. Permiten a los alumnos explorar la equivalencia algebraica, ya que hay múltiples formas de ver y simbolizar el patrón. Considero que las tareas de patrones visuales son excelentes tareas matemáticas accesibles porque son accesibles (bajo nivel), ampliables (alto nivel), multimodales y tienen múltiples soluciones. (Para obtener más información sobre las tareas de patrones visuales, consulte la Guía de prácticas docentes en línea).



Guía de prácticas docentes en línea <https://qrs.ly/l7f7rwq>

De vuelta en el aula, los alumnos se trasladaron de sus pupitres a las pizarras blancas que cubren las paredes del aula. Los grupos parecían empezar por volver a dibujar cada término del patrón. Era evidente que los alumnos ya lo habían hecho antes, ya que se lanzaron directamente a debatir cómo cambia el patrón, incluso mientras uno de ellos lo dibujaba. Los alumnos empezaron a agrupar partes concretas del patrón.

Los dos niños de la figura 4.3 están discutiendo cómo funciona el patrón y encontrando las «partes» que ven repetidas a lo largo del patrón. El niño que señala se ha fijado en la «cola», como él la llama, y está observando cómo crece.

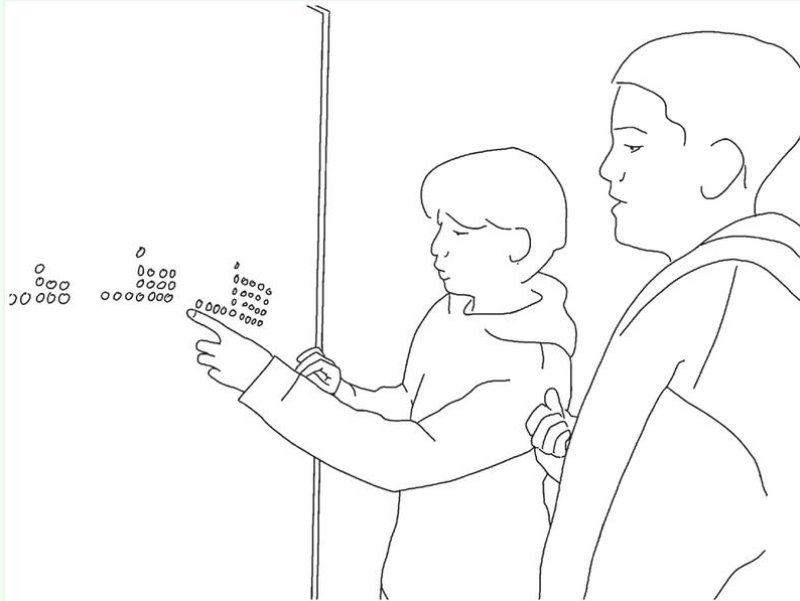


Figura 4.3 • Dos niños discuten el patrón

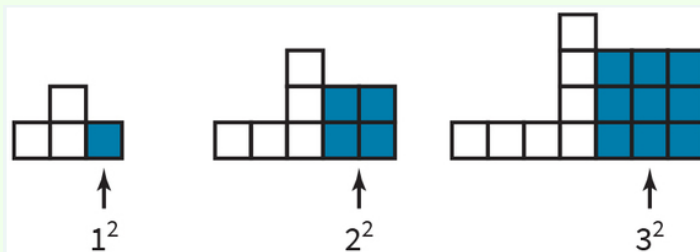
Me llama la atención lo concentrados que están, así como lo conectados que están con el problema.

Estos dos alumnos de la figura 4.4 vieron el patrón de forma diferente. La niña de delante ve los fragmentos que ha delineado, los considera x2 y está tratando de averiguar cómo explicar las piezas adicionales.



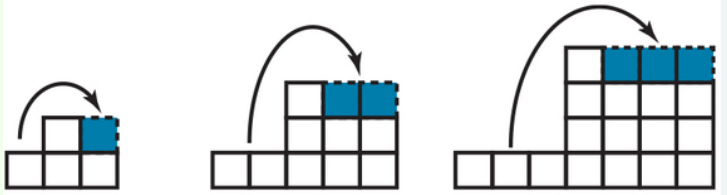
Figura 4.4 • Dos estudiantes discuten sobre la búsqueda de un cuadrado en el patrón creciente

Aquí hay una anotación de su razonamiento:



El chico con el que está trabajando lo ve de otra manera. Él hace un segundo rectángulo fuera del de ella, mostrando cómo se puede tomar la pieza que sobresale y moverla hacia arriba, formando así un cuadrado. En este preciso

momento, él le ha explicado su razonamiento y ella está claramente pensándolo. Aquí hay una anotación de su razonamiento



Mientras los observaba trabajar, le oí decirle que no tenía ni idea de cómo escribir esto en álgebra porque «no entiendo álgebra». Ella se rió, ya que él es bastante bromista, y luego juntos empezaron a trabajar en cómo algebraizar su elegante estrategia. En ese momento, él tenía una visión visual y ella tenía puntos fuertes en la representación simbólica, por lo que su grupo se benefició de sus diferentes puntos fuertes.

Otra estudiante dejó su grupo y se acercó a la pizarra inteligente situada al frente de la clase para empezar a trabajar sola. Estaba tan entusiasmada con su patrón que quería compartirlo en la pizarra del profesor (Figura 4.5). Empezó a explicarme cómo veía el patrón como dos grupos de x^2 , con algunos restos. ¿Veis sus flechas?

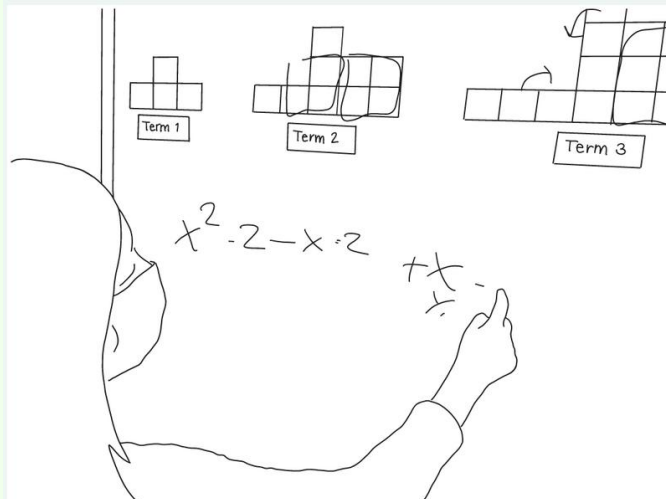


Figura 4.5 • Una niña trabaja en la pizarra inteligente

Aquí se la ve trabajando en una expresión algebraica del patrón, aún sin completar.

Mientras los alumnos trabajaban, el Sr. Jay circulaba por el aula. Cuando le hacían una pregunta, a menudo planteaba otra pregunta o les preguntaba si lo habían discutido en grupo. Observaba, recopilando las estrategias que utilizaban los alumnos y los datos de evaluación. Cuando un grupo había escrito una ecuación que podía defender, el Sr. Jay les pedía que primero recorrieran el aula y revisaran el trabajo de sus compañeros. Si terminaban, tenía otro patrón visual preparado para ellos.

El Sr. Jay terminó la clase comparando brevemente las diferentes formas en que los alumnos lo veían y planteando la pregunta de si las diferentes ecuaciones eran equivalentes (Figura 4.6). Dijo: «Eso es lo interesante. Si tomáis cada una de estas formas de escribirlo y las simplificáis, encontraréis la misma expresión, x más 1 al cuadrado».

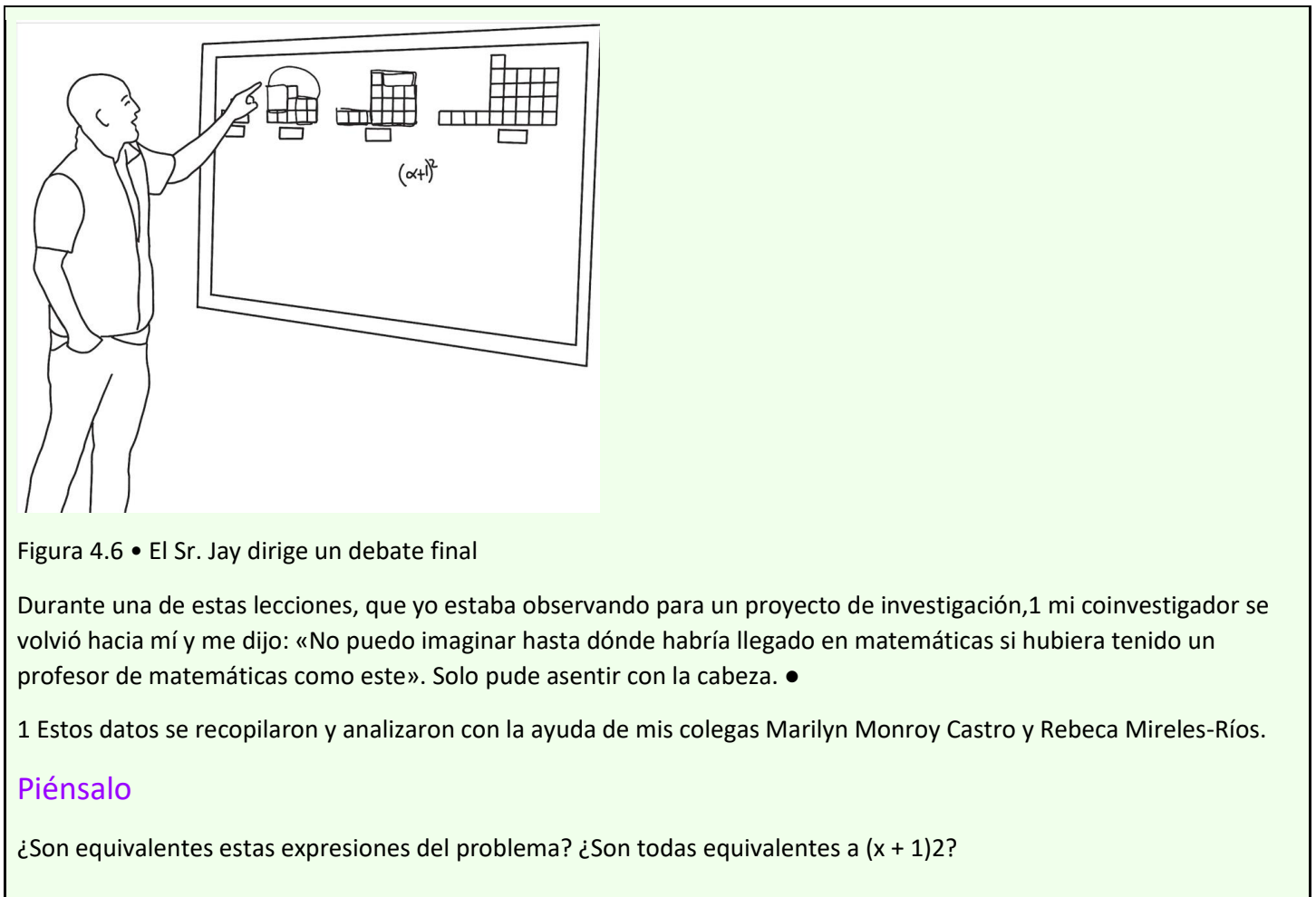


Figura 4.6 • El Sr. Jay dirige un debate final

Durante una de estas lecciones, que yo estaba observando para un proyecto de investigación,1 mi coinvestigador se volvió hacia mí y me dijo: «No puedo imaginar hasta dónde habría llegado en matemáticas si hubiera tenido un profesor de matemáticas como este». Solo pude asentir con la cabeza. ●

1 Estos datos se recopilaron y analizaron con la ayuda de mis colegas Marilyn Monroy Castro y Rebeca Mireles-Ríos.

Piénsalo

¿Son equivalentes estas expresiones del problema? ¿Son todas equivalentes a $(x + 1)^2$?

LA TOMA DE DECISIONES PEDAGÓGICAS DEL SR. JAY

El Sr. Jay enseña en una escuela con una población casi 100 % latina, en una comunidad mixta rural/suburbana, donde la mayoría de las familias tienen ingresos por debajo del umbral de la pobreza. La escuela es una escuela bilingüe centrada en el desarrollo de la autonomía y la participación de los alumnos. Esta clase incluye alumnos multilingües que también son estudiantes con discapacidades. Antes de esta tarea, el Sr. Jay no enseñó nada previamente, aunque sabía que los alumnos se sentían cómodos con el concepto de variable (¡algo que atribuí a las numerosas tareas de patrones visuales!). Esto ocurrió casi al final de dos años de visitas a su clase para un proyecto de investigación.

En una de mis primeras entrevistas con el Sr. Jay, me contó que trabajar como profesor de matemáticas en la escuela secundaria solía dejarlo agotado al final del día. Sentía como si hubiera estado actuando todo el día, trabajando el doble para conseguir que sus alumnos, a menudo reacios, se involucraran en las complejas matemáticas de la escuela secundaria. Como me dijo:

Solía pensar que estaba haciendo lo correcto si simplemente les daba la información y les explicaba cada paso del proceso. Y al final del día, me sentía agotado. Y pensaba que ellos lo sabían. Sabían matemáticas porque les explicaba cada pequeño paso. Pero lo que he aprendido es que eso no funciona. Eso no significa que mis alumnos hayan aprendido realmente nada.

Consideraba que aumentar la participación de los alumnos en la resolución de problemas era el principal problema práctico de su trabajo. Quería facilitar el cambio de una participación superficial por parte de algunos, pero no de todos, a conseguir que todos sus alumnos se implicaran profundamente en la resolución de problemas. El Sr. Jay ya había

trabajado duro para crear una comunidad positiva en el aula. Su carácter amable y divertido, su sólida relación con los alumnos y su flexibilidad natural con los niños constituían una base sólida. Pero no parecía suficiente. El Sr. Jay describió su forma de pensar sobre la enseñanza de las matemáticas como un proceso que comenzaba con el objetivo de desarrollar «pensadores capaces de resolver problemas» antes que habilidades y estándares. Otro aspecto importante era fomentar la confianza de los alumnos, ayudándoles a «creer en sí mismos».

Debido a este deseo de aumentar la participación de los alumnos, el Sr. Jay había pasado los últimos dos años experimentando con estrategias para la participación en la resolución de problemas desarrolladas por Peter Liljedahl en su libro *The Thinking Classroom* (2020). Para el Sr. Jay, la integración de tres elementos de *The Thinking Classroom* supuso una gran diferencia: (a) dividir a los alumnos en grupos aparentemente aleatorios (asegurándose de que los alumnos supieran que los grupos eran aleatorios), (b) proporcionar superficies verticales no permanentes (en este caso, pizarras blancas) y (c) darles tareas estupendas y accesibles en las que trabajar (Tabla 4.1), empezando por tareas no curriculares (tareas de reflexión que no están relacionadas con los estándares del curso; para más información sobre las aulas de pensamiento, véase la Guía de prácticas docentes en línea).

A medida que avanzaba el año, el Sr. Jay integró secuencias de problemas, incluidas las de *Illustrative Mathematics* y *Desmos*, para cubrir el contenido de álgebra del nivel de grado.

Características	Descripción	Ejemplo de la tarea de patrones visuales del Sr. Jay
Accesible: nivel bajo	Los alumnos pueden participar en el problema aunque tengan conocimientos limitados sobre el tema. Hay una forma de participar para todos.	Los alumnos pueden contar las casillas para averiguar cuántas hay para cada término. Pueden comenzar su trabajo dibujando los siguientes términos, lo que puede resultar más accesible que crear la expresión algebraica.
Adaptable: Nivel avanzado	El problema tiene extensiones y posibilidades pedagógicas que permiten ampliarlo a temas matemáticos más complejos.	El Sr. Jay animó a algunos alumnos a centrarse en la equivalencia entre diferentes expresiones algebraicas.
Multimodal	El problema es visual/geométrico, numérico y simbólico, tanto en las vías de solución como en las representaciones.	Los alumnos deben convertir un patrón visual en expresiones utilizando notación simbólica (variables y exponentes). La tarea les pide que se muevan entre dos modalidades.
Varias vías de solución	Hay múltiples formas de resolver el problema.	Los alumnos pueden conceptualizar los «fragmentos» que luego representan algebraicamente de múltiples maneras, todas ellas expresiones algebraicas diferentes (equivalentes).

Hasta ahora tenemos la hermosa historia de un profesor que aprendió a facilitar una enseñanza significativa basada en la investigación en octavo curso para una clase que incluía con éxito a alumnos con discapacidades. Y sí, por eso la clase del Sr. Jay era tan inspiradora y por eso disfruté tanto visitándola. Sin embargo, a lo largo de este año escolar, también vi al Sr. Jay utilizar una pedagogía más estructurada. Mientras que en esta lección confiaba plenamente en que los alumnos llegarían por sí mismos a la solución, en otras lecciones ofrecía más andamios a los alumnos. Al mismo tiempo, observaba cómo se repetía el viejo debate: si la enseñanza basada en la investigación o la enseñanza explícita era más eficaz en matemáticas. Pude ver que un gran profesor como el Sr. Jay había superado con creces ese manido binomio.

El Sr. Jay siempre comenzaba un nuevo tema con tareas de investigación. Sin embargo, compartió que, para algunos de los temas que enseñaba, pasaba a una pedagogía más explícita, pero que no volvía a la enseñanza totalmente explícita de su pasado. Por ejemplo, para las reglas de los exponentes, comenzaba el tema con una exploración abierta de cuadrados y cubos, para asegurarse de que los alumnos pudieran visualizar lo que significaban los exponentes. Pero para

las reglas de la suma y la multiplicación de exponentes, presentó a los alumnos ecuaciones con exponentes que resaltaban los patrones. A continuación, dirigió un debate sobre lo que habían observado en los patrones. Después, discutió cuidadosamente cada regla, cómo aplicarla, y les dio mucha práctica con comentarios. Los alumnos tomaron notas, a las que podrían recurrir en el futuro. Como él mismo me dijo: «Simplemente parece una regla, así que la enseñó como tal». Intentó que estos momentos fueran breves y solo utilizó este tipo de instrucción cuando el tema lo requería claramente.

También era más explícito con los alumnos en momentos concretos, justo cuando los necesitaban. Uno de los temas que enseñó fue la resolución de ecuaciones lineales. A mediados de año, lo vi dando a una clase de séptimo grado una serie de problemas para resolver ecuaciones lineales. Me dijo que en la evaluación del día anterior, demasiados alumnos de esta clase no habían sido capaces de recordar el procedimiento, por lo que volvía a repetirlo. No utilizó ninguna instrucción explícita para todo el grupo, sino que dividió a los alumnos en grupos para que trabajaran juntos. Recorrió el aula y proporcionó apoyo justo a tiempo a los alumnos que lo solicitaron.

Me di cuenta de que Araceli, una alumna con un Programa de Educación Individualizada (IEP) por una discapacidad de aprendizaje, se había alejado de su grupo y estaba trabajando en un problema en la pizarra. El problema era $-9x = -81$. Araceli escribió el problema en la pizarra y fue capaz de dividir ambos lados por -9 , pero parecía atascada a partir de ahí.

Mientras estaba allí de pie, el Sr. Jay se acercó. Le preguntó en voz baja si quería hablar sobre el problema y ella asintió con la cabeza. Escuché mientras él trataba de averiguar qué parte del problema la tenía desconcertada. Comenzó preguntándole por qué dividía por -9 ; ella parecía entenderlo, ya que sabía que $-9/-9$ sería uno y que su objetivo era mantener ambos lados equivalentes. Luego comenzó a hablarle de las reglas para multiplicar números negativos y escribió una imagen para ayudarla a recordar (un número positivo por un número positivo es un número positivo, y así sucesivamente). Creó este esquema visual con ella, pidiéndole que recordara lo mejor que pudiera las reglas mientras él las escribía. No le dio las respuestas, sino que le dio pistas tanto verbalmente como visualmente, y luego esperó. Después de crear este esquema visual, Araceli escribió $x = 9$, aplicando con éxito las reglas. A continuación, pasó al siguiente problema: $-x + 11 = 35$. Así es como quedó la pizarra al final de su conversación:

The image shows handwritten notes on a chalkboard. On the left, there is a 4x3 grid of signs:

+	+	+
-	+	-
+	-	-
-	-	+

 To the right of the grid, the equation $-9x = -81$ is written, with -9 written below the $-9x$ and a horizontal line drawn under it. Below the line, $x = 9$ is written and enclosed in a hand-drawn box. Below that, the equation $-x + 11 = 35$ is written.

Analicemos esta interacción. En primer lugar, el Sr. Jay no se apropió del pensamiento de Araceli. Esperó a comprender mejor lo que ella sabía y lo que no sabía antes de intervenir. Con la imagen visual de la multiplicación con números con signo, no le estaba dando la respuesta, sino creando conjuntamente una imagen visual que ella podía utilizar para llegar a la respuesta. Le ayudó a construir su respuesta, proporcionándole el apoyo estratégico necesario, pero siempre empezando con preguntas y dándole suficiente espacio para que recordara si podía.

En una entrevista con nuestro equipo de investigación unos meses más tarde, le preguntamos a Araceli sobre este momento. Ella lo recordaba y explicó que le gustaba cómo el Sr. Jay le hablaba «cara a cara» cuando no estaba segura de qué hacer. También señaló que él le daba tiempo suficiente para pensar y que «no te da la respuesta, pero te la explica mejor que el papel». Araceli criticaba tanto a los profesores que ayudaban demasiado como a los que ayudaban

muy poco. El Sr. Jay había encontrado el punto medio, dándole el apoyo justo para que ella pudiera resolverlo por sí misma. En mis proyectos de investigación, he oído a varios alumnos con IEP decirme que aprecian especialmente cuando un profesor se acerca a ellos y les ofrece respetuosamente la ayuda individualizada que necesitan.

Por último, vimos otra forma en la que los alumnos de la clase del Sr. Jay recibían un tipo de instrucción más explícita: el coaching entre alumnos. Dado que su clase se centraba tanto en el trabajo en grupo, vimos muchos casos de alumnos que ayudaban a otros alumnos. Al igual que el Sr. Jay hizo este esquema visual para ayudar a Araceli, vimos a alumnos haciendo esquemas visuales para ayudar a otros alumnos. Vimos a alumnos con y sin discapacidades ejerciendo de tutores de otros alumnos. En las entrevistas, los alumnos se mostraron muy agradecidos por esta tutoría de otros alumnos.

COMPRENDER LA ENSEÑANZA EXPLÍCITA Y LA ENSEÑANZA BASADA EN LA INVESTIGACIÓN

Entonces, ¿cuándo utilizamos la enseñanza basada en la investigación? ¿Cuándo utilizamos la enseñanza explícita? ¿Y por qué la gente sigue discutiendo sobre esto? Profundicemos en estas preguntas durante el resto del capítulo, empezando por definir ambos conceptos.

Enseñanza explícita

La enseñanza explícita es un conjunto de prácticas que incluyen objetivos claramente definidos, una enseñanza bien ritmada con oportunidades para la interacción de los alumnos, comentarios y práctica. Se desarrolló a partir de la enseñanza directa, un conjunto específico de prácticas docentes que se desarrolló en la década de 1970 para enseñar todas las materias (Hughes et al., 2017). La enseñanza explícita también está relacionada con «Yo lo hago» (el profesor da ejemplo), «Nosotros lo hacemos» (los alumnos lo intentan con una orientación significativa del profesor) y «Tú lo haces» (los alumnos practican de forma independiente). La enseñanza explícita se ha definido como la siguiente secuencia (Doabler y Fien, 2013):

1. el profesor modela un nuevo concepto o habilidad,
2. el profesor ofrece oportunidades de práctica guiada,
3. el profesor comprueba la comprensión de los alumnos,
4. el profesor proporciona comentarios académicos, y
5. los alumnos realizan prácticas independientes.

No hay nada necesariamente malo en la instrucción directa o explícita, si se ajusta a nuestros objetivos. Considero que este tipo de pedagogía es útil cuando los alumnos necesitan aprender una habilidad o un procedimiento específico y la mejor manera de aprenderlo es practicando.

Pero me preocupa bastante cuando se dice a los profesores que la enseñanza explícita es la única forma eficaz de enseñar matemáticas a los alumnos, algo que oigo a menudo en relación con los alumnos con discapacidades. Esta creencia es muy problemática, porque la enseñanza explícita no está diseñada para desarrollar el sentido matemático. La enseñanza explícita les dice a los estudiantes cómo pensar y exactamente cómo resolver problemas. Podría afectar la capacidad de los estudiantes para aprender a resolver problemas no rutinarios, así como para desarrollar la intuición matemática (Panel Asesor Nacional de Matemáticas, 2008). Puede afectar el sentido de agencia de los estudiantes y, por lo tanto, el desarrollo de su identidad como matemáticos. Una dieta basada únicamente en la enseñanza explícita de procedimientos no es una dieta matemática equilibrada, ya que priva a los estudiantes de la oportunidad de resolver problemas complejos y auténticos.

Una dieta basada únicamente en la enseñanza explícita de procedimientos no es una dieta matemática equilibrada, ya que priva a los alumnos de la oportunidad de resolver problemas complejos y auténticos.

Otra de mis preocupaciones con respecto a la enseñanza explícita exclusiva es que este modo de enseñanza no permite que los alumnos descubran sus propios conceptos erróneos y construyan nuevas ideas. La enseñanza explícita consiste en aprender un procedimiento predeterminado, y a menudo no se tienen en cuenta las ideas que ya tiene el alumno. Sin embargo, todos nuestros alumnos tienen ideas. Algunas son problemáticas y pueden resultar confusas. Cuando se permite a los alumnos pensar y compartir sus ideas, estas se hacen visibles para ellos, tanto las que funcionan como las que hay que cambiar. El poder está en manos del alumno, guiado por un profesor. Cuando se enseña a los alumnos procedimientos y no se les permite pensar por qué funcionan, pueden desarrollar «algoritmos defectuosos», en los que aplican incorrectamente los procedimientos (Hurst y Huntley, 2018).

Otra preocupación es hasta qué punto debe ser específica esta enseñanza para que sea eficaz. La enseñanza explícita está diseñada para basarse cuidadosamente en los conocimientos previos sobre los procedimientos. No utilizaríamos la enseñanza explícita para enseñar el algoritmo de multiplicación a alumnos que no dominaran la resta con reagrupación. El algoritmo de multiplicación se basa en el procedimiento de resta, por lo que los alumnos deben conocerlo previamente. Por eso, gran parte de la investigación sobre la enseñanza explícita en la educación matemática se realiza de forma individualizada, para que los investigadores puedan asegurarse de que la enseñanza se adapta al alumno. Por lo tanto, es una pedagogía difícil de aplicar en las aulas, ya que nuestros alumnos suelen tener diferentes niveles en cuanto a conocimientos previos.

Enseñanza basada en la investigación

La enseñanza basada en la investigación se refiere a una gama mucho más amplia de prácticas pedagógicas que la enseñanza explícita: en términos generales, los alumnos aprenden matemáticas resolviendo problemas sin que se les diga de antemano cómo hacerlo. Proviene de las teorías constructivistas del aprendizaje, según las cuales todos aprendemos a través de la experiencia y de nuestras reflexiones sobre estas experiencias.

A veces, cuando escucho argumentos en contra del aprendizaje basado en la investigación, veo que en realidad están en contra del aprendizaje por descubrimiento. El aprendizaje por descubrimiento, un concepto más antiguo que data de la década de 1960, es una forma más extrema de constructivismo en la que se les dan problemas a los alumnos y se les da libertad para descubrir las matemáticas por sí mismos, sin ningún apoyo del profesor. Esto no es lo que hacen la mayoría de los profesores cuando enseñan matemáticas, incluso cuando plantean problemas de investigación. ¡El Sr. Jay no se limita a darles problemas a los alumnos y salir a almorzar! Él, como todos los profesores de este libro, trabaja muy duro para diseñar tareas con un propósito y una secuencia específicos, así como para proporcionar apoyo en forma de preguntas del profesor, debates verbales y atención a la generalización de nuevas ideas. De hecho, sé que la enseñanza basada en la investigación puede salir mal para los alumnos cuando no se les proporciona suficiente apoyo para participar, o suficiente apoyo para recordar y generalizar los conocimientos que desarrollan. Una buena enseñanza de las matemáticas basada en la indagación incluye muchos andamios y apoyos para los alumnos.

¿Cuáles son nuestros objetivos?

Creo que el problema es que hemos planteado este debate sobre qué enfoque de enseñanza «funciona» sin tener en cuenta que ambos funcionan para objetivos diferentes. Los científicos cognitivos Daniel Schwartz y sus colegas (2016) describieron este problema de una manera que podría llevarnos más allá del enfoque de «o una cosa o la otra». Utilizando conceptos de la ciencia cognitiva, describieron cómo el conocimiento en sí mismo (en todas las áreas de contenido) presenta una tensión entre la eficiencia y la innovación. La innovación se refiere a preparar a los alumnos para resolver problemas complejos y nuevos en sus campos. La eficiencia se refiere a preparar a los alumnos para resolver de manera eficiente los tipos de problemas que ya existen. Ambos objetivos son loables, pero a menudo entran en tensión cuando planificamos. Si nos centramos demasiado en preparar para la innovación, es posible que los

estudiantes no tengan tiempo suficiente para prepararse para la eficiencia. Sin embargo, centrarse en la eficiencia puede ser contraproducente para la innovación. Los científicos cognitivos describen la experiencia adaptativa como el objetivo de los estudiantes en todas las materias, lo que significa ser capaz de adaptarse y elaborar estrategias para problemas nuevos y desconocidos (innovación) utilizando el conocimiento (eficiencia) (Hatano e Inagaki, 1986).

La innovación se refiere a preparar a los alumnos para resolver problemas complejos y nuevos en sus campos. La eficiencia se refiere a preparar a los alumnos para resolver de manera eficiente los tipos de problemas que ya existen.

Pongamos esta discusión en otro contexto. Pensemos en los partidos de fútbol como oportunidades para la innovación en matemáticas. Un partido de fútbol pide a los niños que innoven basándose en condiciones cambiantes, una tarea no rutinaria. Y es (¡esperemos!) divertido. El entrenamiento de fútbol es un tipo de actividad diferente. Durante los entrenamientos, los estudiantes realizan actividades rutinarias diseñadas para desarrollar sus habilidades. ¿Se imagina jugar partidos sin entrenar? Es posible que los niños no tengan las habilidades necesarias para innovar con éxito durante los partidos. ¿Y qué hay de los entrenamientos sin partidos? Los niños perderían el interés, así como la capacidad de pensar con rapidez ante problemas no rutinarios.



FUENTE: istock.com/FatCamera; istock.com/AzmanJaka

En matemáticas, los estudiantes necesitan desarrollar habilidades y estrategias junto con la experiencia en la resolución de problemas complejos. La experiencia adaptativa en matemáticas es un conocimiento procedimental (estratégico) y conceptual muy conectado que se puede aplicar de manera flexible en nuevos contextos (Baroody, 2003). La tabla 4.2 aplica estas ideas de Schwartz et al. (2016) a las matemáticas para crear un cuadro que contrasta la innovación con la eficiencia. Estos autores advirtieron que no debemos centrarnos en una columna excluyendo la otra; este tipo de conocimientos se desarrollan mejor de forma iterativa. No debemos esperar hasta la licenciatura en matemáticas para dejar que los estudiantes jueguen con las matemáticas, ni debemos dejar de proporcionarles oportunidades para desarrollar la eficiencia.

Objetivos de las actividades de conocimiento de innovación en matemáticas (jugar al juego)	Objetivos de las actividades de conocimiento eficiente en matemáticas (práctica centrada)
<p>Desarrollar la comprensión de la estructura y la variación de las matemáticas</p> <p>Explorar los problemas que deben resolverse en matemáticas</p>	<p>Estar expuesto a las soluciones de los demás</p> <p>Aprender por qué funcionan esas soluciones</p> <p>Practicar con el objetivo de la eficiencia</p>

<p>Plantear problemas que puedan resolverse en matemáticas y que sean importantes para ti</p> <p>Formar parte de una comunidad de aprendizaje en la que cometer errores es parte del proceso</p> <p>Jugar con las matemáticas.</p> <p>Fomentar la satisfacción intrínseca.</p> <p>Aprende a tomar las conjeturas matemáticas con ligereza y busca opiniones</p> <p>Desarrolla una disposición productiva.</p> <p>Participa en prácticas matemáticas, como la modelización y el debate (SMP).</p> <p>Ver la relevancia de las matemáticas para la propia identidad y comunidad</p>	<p>Resolver problemas en diferentes condiciones con vistas a la generalización.</p> <p>Perfeccionar la resolución de problemas y las estrategias.</p> <p>Siente una sensación de competencia a través de un desempeño hábil</p>
---	---

Piénselo

Reflexionando sobre la tabla 4.2, ¿qué es lo que nos importa como profesores? ¿Con qué afirmaciones te sientes especialmente identificado? ¿Qué hacemos en nuestras aulas para apoyar ambos tipos de desarrollo del conocimiento?

Reflexionando sobre los objetivos del Sr. Jay

Volvamos a los objetivos del Sr. Jay como profesor de su clase inclusiva: en primer lugar, desarrollar «pensadores capaces de resolver problemas» antes que habilidades y estándares. Su segundo objetivo era fomentar la confianza de los alumnos, ayudándoles a «creer en sí mismos». El Sr. Jay creía que, para alcanzar estos objetivos, sus alumnos necesitaban muchas oportunidades para participar en investigaciones significativas. Y creía que debían comenzar el año en modo de investigación para la resolución de problemas. La eficiencia llegaría, pero primero tenía que conseguir que creyeran en sí mismos como solucionadores de problemas. Necesitaban adquirir el hábito de dar sentido a las cosas.

El Sr. Jay no cree que sus alumnos con discapacidades necesiten algo completamente diferente a los demás alumnos. Si todos los alumnos necesitan dedicarse intensamente a la resolución significativa de problemas, lo mismo ocurre con sus alumnos con discapacidades. Si todos los alumnos también necesitan una enseñanza que les lleve a la eficiencia, lo mismo ocurre con sus alumnos con discapacidades. Este es un argumento clave en materia de equidad. Uno de los objetivos fundamentales de la educación inclusiva es proporcionar acceso a la participación en la educación general a los alumnos con discapacidades, lo que se denomina «entorno menos restrictivo». En matemáticas, ese principio significa que los alumnos con discapacidades deben tener acceso al mismo tipo de matemáticas que se imparte a los alumnos de educación general, o al plan de estudios menos restrictivo. Suponer que ciertos alumnos no pueden hacer este tipo de matemáticas porque no pueden pensar y, por lo tanto, solo se les deben impartir procedimientos matemáticos, es discriminatorio y destructivo.

COMPRENDER LAS AFIRMACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA EXPLÍCITA Y LOS ESTUDIANTES CON DISCAPACIDAD

Entonces, ¿de dónde viene esta idea de que la enseñanza basada en la investigación no es adecuada para los alumnos con discapacidades? Para entenderlo, debemos dedicar un poco de tiempo a comparar la investigación en educación matemática con la investigación sobre matemáticas en educación especial.

A partir de la década de 1950, tanto las matemáticas como la educación especial se vieron muy influenciadas por el conductismo, o la idea de que debemos centrarnos en los comportamientos observables. Las investigaciones en esta tradición se centran en habilidades directamente medibles, como la precisión en la memorización de datos o la reproducción de procedimientos. La enseñanza directa y explícita es la recomendación pedagógica de los investigadores en este ámbito, ya que son las formas más directas de enseñar este tipo de matemáticas. Si las matemáticas consisten en reproducir procedimientos y memorizar datos, entonces la enseñanza explícita parece una opción eficaz.

En la década de 1960, la enseñanza de las matemáticas se transformó con lo que se denominó la «revolución cognitiva». El aspecto más influyente en la enseñanza de las matemáticas fue el constructivismo, o la idea de que todos abordamos el nuevo aprendizaje con algún aprendizaje previo, aprendizaje que utilizamos como base para aprender cosas nuevas. La mente —y el pensamiento del estudiante— es el foco principal de esta tradición. Las matemáticas se consideran una red complicada e interconectada de conceptos y estrategias. Este conjunto de investigaciones desarrolló un argumento a favor de las matemáticas basadas en la investigación, en las que los estudiantes desempeñan un papel activo en su propio aprendizaje.

Mientras que la investigación en educación matemática avanzó durante décadas basándose en una teoría constructivista del aprendizaje, la investigación en educación especial se ha opuesto históricamente de forma activa al constructivismo (Woodward, 2004). La investigación en educación especial ha dedicado décadas a investigar cómo la instrucción explícita aumenta las habilidades procedimentales de los estudiantes con discapacidades. Al mismo tiempo, la educación matemática ha tendido a dejar fuera de la investigación a los estudiantes con discapacidades, lo que ha significado que haya mucha menos investigación sobre el pensamiento matemático y la resolución de problemas de los estudiantes con discapacidades en las matemáticas basadas en la investigación (Lambert y Tan, 2020).

Por lo tanto, la investigación es diferente porque los campos de investigación son diferentes, no porque los niños sean diferentes. Esta diferencia en la forma en que los adultos abordan la investigación, y no una diferencia en lo que los niños necesitan o quieren, ha creado nuestra situación actual. Según el Panel Asesor Nacional de Matemáticas, «es importante señalar que no hay pruebas que respalden la enseñanza explícita como único modo de enseñanza para los alumnos [con dificultades de aprendizaje]» (2008, p. 1229).

INVESTIGACIÓN SOBRE LAS DOS PEDAGOGÍAS

Entonces, ¿qué sabemos sobre la eficacia de estas diferentes prácticas de enseñanza? Aunque hay muchas investigaciones sobre la enseñanza explícita y la enseñanza basada en la investigación por separado, es difícil compararlas porque la mayoría de las investigaciones no comparan una con la otra.

Un influyente artículo que comparaba la enseñanza explícita con la enseñanza basada en la investigación (Alfieri et al., 2011) incluía dos grandes metaanálisis de investigaciones en múltiples campos de contenido. En su primer estudio, Alfieri et al. compararon el «aprendizaje por descubrimiento sin ayuda» con las «prácticas de enseñanza explícita». Definieron el aprendizaje por descubrimiento sin ayuda como la enseñanza en la que los profesores no proporcionan a los alumnos ningún tipo de apoyo o orientación, ni plantean preguntas o debates, sino que solo les plantean un problema. Como era de esperar, la enseñanza explícita resultó más eficaz que los problemas planteados sin orientación. Creo que todos podríamos haberlo previsto. En su segundo estudio, crearon una nueva categoría que denominaron

«aprendizaje por descubrimiento guiado», que consistía en la resolución de problemas basada en la investigación, pero con andamiaje y apoyo, como comentarios y preguntas del profesor. En esta comparación, descubrieron que el aprendizaje por descubrimiento guiado era más eficaz que la enseñanza explícita (Alfieri et al., 2011). Para evitar el uso del término obsoleto «aprendizaje por descubrimiento», llamaré a esta categoría «investigación guiada».

A pesar del hallazgo de que la indagación guiada era más eficaz que la instrucción explícita, este artículo de Alfieri et al. (2011) se ha citado incorrectamente para apoyar la idea de que la instrucción explícita es más eficaz que el aprendizaje basado en la indagación. Quizás quienes lo hacen creen realmente que los profesores solo tienen que dar a los alumnos problemas matemáticos y luego marcharse, asumiendo que los niños resolverán las matemáticas por sí mismos. Si esto funcionara, ¡nuestro trabajo sería mucho más fácil! Pero sabemos que esto no funciona y que no es lo que ocurre en nuestras aulas. Los niños necesitan apoyo y orientación en las matemáticas basadas en la investigación. En este libro, voy a ofrecer historias de profesores como el Sr. Jay, que utilizan deliberadamente preguntas, debates y andamios para apoyar a los alumnos en la investigación guiada.

Quiero destacar una impresionante serie de estudios que han investigado la eficacia del aprendizaje basado en la investigación guiada para alumnos con discapacidades. En una serie de rigurosos estudios que abarcan varias décadas, Bottge y sus colegas han desarrollado y evaluado un plan de estudios diseñado específicamente para que los alumnos con dificultades de aprendizaje (DA) participen en la investigación matemática, denominado «Enhanced Anchored Instruction» (Bottge, 1999; Bottge et al., 2002, 2007, 2010, 2014). Mediante el uso de problemas basados en vídeos, los investigadores sumergieron a los estudiantes con discapacidades de aprendizaje en contextos como la construcción de rampas de skateboard y aerodeslizadores para aprender álgebra y fracciones. Al eliminar las barreras textuales, su trabajo ha permitido a los estudiantes participar en matemáticas desafiantes a través de la resolución de problemas abiertos. Sus estudios iniciales se llevaron a cabo en aulas de recursos de educación especial, donde encontraron fuertes efectos positivos, particularmente en las habilidades de resolución de problemas de los estudiantes (Bottge, 1999). En sus primeros estudios en los que se probó el enfoque en entornos de educación general inclusiva, los estudiantes con discapacidades no obtuvieron tan buenos resultados como en los estudios anteriores (Bottge et al., 2002). Descubrieron que los estudiantes con dificultades de aprendizaje no participaban por igual en los grupos pequeños y recibían menos apoyo de los profesores. También descubrieron que los profesores necesitaban más formación profesional para profundizar en los contenidos que enseñaban.

Por lo tanto, estos investigadores rediseñaron su trabajo, añadiendo formación profesional adicional para los profesores con el fin de asegurarse de que no solo comprendían las matemáticas de las unidades, sino también cómo involucrar a todos los alumnos en el trabajo en grupos pequeños. Estas modificaciones tuvieron éxito y dieron lugar a avances significativos para todos los alumnos, en los que los alumnos con dificultades de aprendizaje tuvieron el mismo crecimiento que los que no tenían ninguna discapacidad (Bottge et al., 2007). En una segunda ronda de rediseño, este equipo añadió un módulo didáctico centrado en los procedimientos y conceptos del cálculo de fracciones utilizando un enfoque mixto que incluía instrucción explícita y investigación guiada (Bottge et al., 2010). Este rediseño volvió a aumentar el rendimiento de los alumnos con discapacidades (Bottge et al., 2014).

El trabajo de este grupo de académicos demuestra empíricamente que los estudiantes con discapacidades de aprendizaje pueden aprender matemáticas complejas a través de la resolución de problemas basada en la investigación guiada, lo que pueden atestiguar múltiples estudios en diferentes entornos. Respeto la forma en que estos investigadores se dedicaron a la investigación del diseño, prestando especial atención a las barreras que surgieron para los estudiantes y rediseñando su intervención antes del siguiente estudio. También tenemos pruebas de otras investigaciones cualitativas de que los estudiantes con discapacidades pueden participar y prosperar en aulas basadas en la investigación, pero necesitan que los profesores sean flexibles y receptivos, proporcionando andamios específicos según las necesidades de los estudiantes (Lambert y Sugita, 2016).

MÁS ALLÁ DEL BINARIO

Lo que me llama la atención de la investigación de Alfieri y sus colegas (2011) sobre la eficacia de los enfoques pedagógicos es que partieron de los dos extremos absolutos de un espectro, con la enseñanza impulsada por los alumnos sin orientación del profesor por un lado (aprendizaje por descubrimiento sin ayuda) y la enseñanza impulsada por el profesor (enseñanza explícita) por el otro, pero vieron la necesidad de otra categoría de pedagogía utilizada en muchos estudios de investigación: la investigación guiada. Este enfoque es una versión escalonada de la enseñanza basada en la investigación, en la que algunos de los escalones son las preguntas y los comentarios del profesor.

Quiero proponer otro tipo de pedagogía que utilizan los profesores e investigadores y que se sitúa en algún punto del continuo entre la indagación y la enseñanza explícita: el desarrollo estratégico guiado, inspirado en el trabajo de Arthur Baroody y sus colegas (2015). Baroody y sus colegas compararon este tipo de enseñanza con la enseñanza directa:

Aunque no se proporciona ni se explica explícitamente al niño un patrón, una relación o una estrategia (como en la enseñanza directa), este tipo de aprendizaje por descubrimiento implica un andamiaje considerable. La enseñanza y la práctica se organizan para dirigir la atención del niño hacia las regularidades o una estrategia. Por ejemplo, los elementos se ordenan secuencialmente para subrayar un patrón o una relación y dirigir la atención hacia una regularidad o estrategia sin expresarlo explícitamente. La retroalimentación proporciona alguna explicación de por qué una respuesta es correcta o incorrecta, además de especificar si una respuesta es correcta o no. (Baroody et al., 2015, p. 94

Esta discusión describe una característica fundamental de mi conjunto de herramientas didácticas que no había visto descrita con tanta claridad antes de este artículo: una instrucción cuidadosamente secuenciada que está muy estructurada, pero que aún así permite a los alumnos pensar por sí mismos. Los andamios pueden incluir la secuencia de problemas diseñados para suscitar el debate sobre estrategias concretas (como en una cadena numérica, que se analiza en los capítulos 9 y 11) o el uso intencionado de andamios en la rutina didáctica «Conectar representaciones» (capítulo 13). En el desarrollo estratégico guiado, los alumnos siguen pensando, pero la rutina o la práctica están más estructuradas.

Baroody y sus colegas, por ejemplo, documentaron la eficacia de este tipo de enseñanza de estrategias en el aprendizaje de estrategias de suma, como los dobles (Purpura et al., 2016). Descubrieron que los enfoques menos estructurados eran igualmente eficaces para estrategias más intuitivas, como sumar uno, pero que la enseñanza más estructurada era eficaz para los dobles (Baroody et al., 2015). Entre los andamios eficaces se incluye la comparación de múltiples estrategias (Durkin et al., 2017), incluyendo el debate sobre cómo funcionan las estrategias y cuándo una estrategia es más eficaz. Otro andamio eficaz es la autoexplicación de los alumnos, o cuando se les da la oportunidad de explicar las estrategias y por qué funcionaron o no (Rittle-Johnson et al., 2017).

Inspirada por el trabajo del Sr. Jay con Araceli, añado otra pedagogía más: el coaching estratégico. Este tipo de enseñanza puede centrarse en estrategias matemáticas o en estrategias metacognitivas. Puede ser coaching para todo el grupo, pero a menudo se realiza a través de reuniones individuales que proporcionan coaching específico para un alumno, teniendo en cuenta lo que sabe y orientándole en lo que no sabe. Este apoyo justo a tiempo proporciona toda la orientación que el alumno necesita, cuando la necesita.

Ahora podemos describir con un poco más de claridad un espectro de enfoques pedagógicos, más allá de un binomio.



No creo estas nuevas categorías para añadir algo nuevo que todos debamos aprender. En cambio, intento nombrar lo que los grandes profesores (y los investigadores innovadores) ya hacen.

Volvamos a lo que hace el Sr. Jay. Considero que su facilitación de la tarea de patrones visuales es un gran ejemplo de investigación guiada. Los alumnos piensan, hablan, comparten e impulsan la resolución de problemas. El Sr. Jay ha establecido las estructuras de la clase para apoyar altos niveles de participación de los alumnos, a través de las prácticas de *The Thinking Classroom* (Liljedahl, 2020). En otras ocasiones, involucra a los alumnos en el desarrollo estratégico guiado, como cuando les dio una secuencia de reglas para exponentes y les pidió que encontrarán patrones. También se dedica al entrenamiento estratégico individualizado y a la instrucción explícita.

Entonces, ¿cómo podemos secuenciar este trabajo? Veamos de nuevo lo que hace el Sr. Jay. Comienza la mayoría de los temas con tareas de investigación guiada, como patrones visuales, en las que los alumnos pueden investigar cómo funciona el álgebra. Es accesible para todos, multimodal y atractivo. Su objetivo con este trabajo es que los alumnos se sientan seguros como solucionadores de problemas y comprendan las grandes ideas que hay detrás del tema que está enseñando. Aquí busca el conocimiento innovador.

Cuando los alumnos están preparados para un procedimiento, pasa a centrarse en objetivos de eficiencia. Cuando es necesario, proporciona instrucciones explícitas sobre procedimientos como la resolución de ecuaciones, aunque siempre de forma breve y concisa. Y cuando es necesario, como en el caso de Araceli, ofrece ese entrenamiento estratégico justo a tiempo, específicamente adaptado a las necesidades del alumno. Por último, el Sr. Jay ofrece a los alumnos muchas oportunidades para practicar lo que han aprendido. Comenzar con la resolución de problemas y luego proporcionar una instrucción más guiada es una estrategia respaldada por la investigación (Sinha y Kapur, 2021).

El Sr. Jay dejó de lado la enseñanza explícita al principio de su carrera porque no creía que sus alumnos aprendieran (y recordaran lo que aprendían) solo con la enseñanza explícita. Pero también quería cambiar su identidad como estudiantes de matemáticas. Y esto es lo que él considera un elemento fundamental para su cambio hacia la investigación guiada como núcleo de su práctica: «Solo quiero que no odien las matemáticas». En las entrevistas con sus alumnos, pude ver el respeto que sentían por su pedagogía. Disfrutaban resolviendo problemas y trabajando en grupo. Tenían mucho que decir sobre la importancia de poder trabajar juntos para resolver problemas difíciles. Y también respetaban que el Sr. Jay revisara algo si lo necesitaban. Ninguno de ellos dijo que odiaba las matemáticas.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

¿Cuáles son sus objetivos como profesor de matemáticas? ¿Cómo se relacionan con las ideas de innovación y eficiencia?

¿Qué ha oído sobre la enseñanza explícita y la enseñanza basada en la investigación, en particular para los alumnos con discapacidades? ¿Qué ha aprendido de este capítulo? ¿Cómo se lo explicaría a otro profesor?

¿De qué manera eres explícito como profesor de matemáticas? ¿De qué manera tu enseñanza se basa en la indagación? ¿Cómo combinas ambas cosas?

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 4.2 • Patrón n.º 225

La tarea de patrón visual muestra una secuencia de 4 formas construidas a partir de pequeños cuadrados en papel milimetrado. Las formas se presentan de la siguiente manera.

Término 1. El término 1 presenta dos filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene tres cuadrados uno al lado del otro. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado central de la fila 1.

Término 2. El término 2 presenta 3 filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene 5 cuadrados uno al lado del otro. La fila del medio contiene 3 cuadrados situados encima de los 3 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado 1 de la fila 2 y del cuadrado 3 de la fila 1.

Término 3. El término 3 presenta 4 filas que contienen cuadrados. La fila 1 contiene 7 cuadrados uno al lado del otro. La fila 2 contiene 4 cuadrados situados encima de los 4 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila 3 contiene 4 cuadrados directamente encima de los 4 cuadrados de la fila 2. La fila superior, la fila 4, contiene un solo cuadrado encima del cuadrado 1 de las filas 2 y 3, y encima del cuadrado 4 de la fila 1.

Término 4. El término 4 presenta 5 filas que contienen cuadrados. La fila 1 contiene 9 cuadrados uno al lado del otro. La fila 2 contiene 5 cuadrados situados encima de los 5 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila 3 contiene 5 cuadrados directamente encima de los 5 cuadrados de la fila 2. La fila 4 contiene 5 cuadrados directamente encima de los 5 cuadrados de la fila 3. La fila superior, la fila 5, contiene un solo cuadrado encima del cuadrado 1 de las filas 2, 3 y 4, y encima del cuadrado 5 de la fila 1.

Razonamiento del alumno A

Las formas de la tarea del patrón se presentan de la siguiente manera. Cada forma contiene un área resaltada para crear una forma cuadrada y cada una se designa como un término

El término 1 presenta 2 filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene 3 cuadrados uno al lado del otro. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado central de la fila 1. El tercer cuadrado de la fila 1 está sombreado para indicar que se trata de un cuadrado. El cuadrado está etiquetado como «1 al cuadrado».

El término 2 presenta 3 filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene 5 cuadrados uno al lado del otro. La fila del medio contiene 3 cuadrados situados encima de los 3 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado 1 de la fila 2 y del cuadrado 3 de la fila 1. Los cuadrados 4 y 5 de la fila 1 y los cuadrados 4 y 5 de la fila 2 están sombreados para indicar que se trata de un cuadrado. El cuadrado está etiquetado como «2 al cuadrado».

El término 3 presenta 4 filas que contienen cuadrados. La fila 1 contiene 7 cuadrados uno al lado del otro. La fila 2 contiene 4 cuadrados situados encima de los 4 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila 3 contiene 4 cuadrados directamente encima de los 4 cuadrados de la fila 2. La fila superior, la fila 4, contiene un solo cuadrado encima del cuadrado 1 de las filas 2 y 3, y encima del cuadrado 4 de la fila 1. Los cuadrados 5, 6 y 7 de las filas 1, 2 y 3 están sombreados para indicar el cuadrado. El cuadrado está etiquetado como 3 al cuadrado.

Razonamiento del alumno B

Las formas de la tarea de patrones se presentan como tres formas. Cada forma contiene un área resaltada para crear una forma cuadrada.

La forma 1 presenta 2 filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene 3 cuadrados uno al lado del otro. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado central de la fila 1. El cuadrado 1 de la fila 1 se mueve a la posición situada encima del cuadrado 3 de la fila 1. Esto crea un cuadrado de 2 por 2.

La forma 2 presenta 3 filas que contienen cuadrados. La fila inferior contiene 5 cuadrados uno al lado del otro. La fila central contiene 3 cuadrados situados encima de los 3 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila superior contiene un solo cuadrado situado encima del cuadrado 1 de la fila 2 y del cuadrado 3 de la fila 1. Los cuadrados 1 y 2 de la fila 1 se mueven a la posición situada encima de los cuadrados 4 y 5 de las filas 1 y 2. Esto crea un cuadrado de 3 por 3.

La forma 3 presenta 4 filas que contienen cuadrados. La fila 1 contiene 7 cuadrados uno al lado del otro. La fila 2 contiene 4 cuadrados situados encima de los 4 cuadrados de la derecha de la fila 1. La fila 3 contiene 4 cuadrados directamente encima de los 4 cuadrados de la fila 2. La fila superior, la fila 4, contiene un solo cuadrado encima del cuadrado 1 de las filas 2 y 3, y encima del cuadrado 4 de la fila 1. Los cuadrados 1, 2 y 3 de la fila 1 se mueven a la posición situada encima de los cuadrados 5, 6 y 7 de las filas 1, 2 y 3. Esto crea un cuadrado de 4 por 4.

La representación visual del Sr. Jay para dividir números negativos

A la izquierda del boceto hay una tabla de 4 filas con 3 columnas. En la primera fila se representan los símbolos más, más y más. En la segunda fila se representan los símbolos menos, más y menos. En la tercera fila se representan los símbolos más, menos y menos. En la cuarta fila se representan los símbolos menos, menos y más.

A la derecha de la tabla hay ecuaciones que representan $9 \text{ sobre menos } 9 \text{ es igual a menos } 81 \text{ sobre menos } 9$. La respuesta es $X \text{ es igual a } 9$.

Y la ecuación final se escribe como $\text{menos } X \text{ más } 11 \text{ es igual a } 35$.

Espectro de enfoques pedagógicos

El continuo se muestra como progresivo en ambas direcciones. A lo largo del continuo se enumeran los siguientes:

Descubrimiento sin ayuda.

Investigación guiada.

Desarrollo estratégico guiado.

Entrenamiento estratégico.

Instrucción explícita.

CAPÍTULO 5 ¿QUÉ ES EL DISEÑO UNIVERSAL PARA EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (UDL MATH)?

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Exploraremos la historia del diseño universal y el diseño universal para el aprendizaje (UDL).

Hablaremos de la variabilidad de los alumnos.

Determinaremos qué es lo que hace que un alumno sea experto en matemáticas.

Analizar los elementos del diseño UDL MATH con relatos de alumnos

Si el profesor entraba en el aula gruñendo y recitando datos de forma mecánica, sin explicar los significados fundamentales, mis discapacidades se agravaban y suspendía. Pero en materias como física, biología y álgebra, impartidas con métodos multisensoriales por profesores amables y entusiastas, sacaba notas casi perfectas.

—Schmitt, 1994, p. 118

Abraham Schmitt, en su autobiografía sobre su infancia con una discapacidad de aprendizaje, explica que el enfoque del profesor era importante para su aprendizaje, al igual que la forma en que se presentaba el contenido. Respondía mejor a la enseñanza multisensorial en ciencias y matemáticas, centrada en los significados fundamentales más que en el aprendizaje memorístico. Menciona cómo sus profesores influyeron en su compromiso, incluida su relación con ellos. También cuenta cómo fue capaz de destacar en las clases de ciencias y matemáticas cuando se le dieron las condiciones adecuadas. Esta cita ilustra la complejidad del aprendizaje, que es fundamental en el marco del Diseño Universal para el Aprendizaje (UDL) y lo que importa a los alumnos con discapacidad en las clases de matemáticas.

En este capítulo, exploramos el Diseño Universal para el Aprendizaje en Matemáticas (UDL Math), comenzando por las raíces del UDL en el Diseño Universal. Presento el UDL Math como un marco flexible para ayudar a los educadores a diseñar clases de matemáticas más accesibles y atractivas. No veo el UDL como un marco más que aplicar o como una lista de estrategias concretas. En cambio, siguiendo a autores como Jay Dolmage (2015), veo el UDL como una «forma de avanzar», una forma de detectar lo que no funciona para nuestros alumnos (barreras) y de abrir creativamente nuestras aulas para que más alumnos puedan tener éxito.

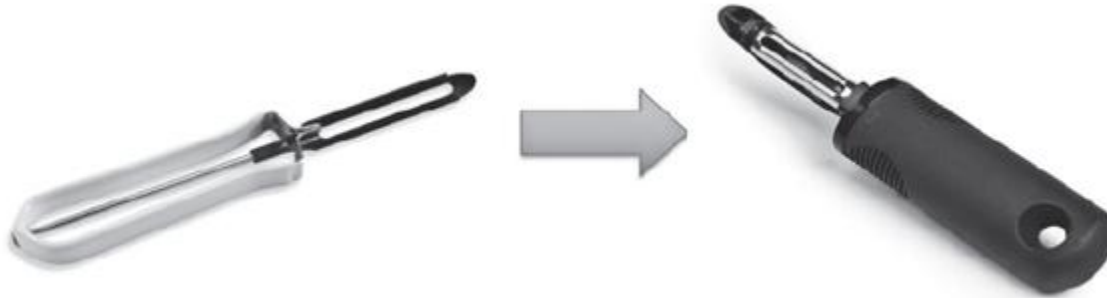
A lo largo del capítulo, me basaré en citas de personas con experiencia, aquellas que han experimentado el aprendizaje de las matemáticas en nuestras escuelas con discapacidades, en particular con discapacidades de aprendizaje como la dislexia y la discalculia. He recopilado todas las citas del capítulo en una actividad llamada Barreras y apoyos en la clase de matemáticas desde una perspectiva neurodiversa, que se encuentra en el apéndice B (p. 260). Una forma de experimentar este capítulo sería detenerse ahora y leer todas esas citas de una vez para comenzar su propio análisis de qué barreras existen en la clase de matemáticas y cómo podríamos rediseñar la clase de matemáticas con empatía.

LA HISTORIA DEL DISEÑO UNIVERSAL

El UDL se inspiró en el movimiento del diseño universal en la arquitectura y el diseño de productos. El diseño universal buscaba encontrar formas elegantes y eficaces de maximizar el uso de los edificios y los productos, impulsado por Ronald Mace, un arquitecto discapacitado. Uno de sus legados fue demostrar que las perspectivas de las personas discapacitadas sobre el diseño para la discapacidad eran particularmente eficaces e innovadoras (Hamraie, 2017). Una

idea clave del diseño universal es que cuando diseñamos teniendo en cuenta la variabilidad de los usuarios desde el principio, en lugar de adaptarlo al final, el diseño es más accesible y más elegante.

Un ejemplo clásico de diseño universal es el pelador de verduras OXO (a la derecha). Echa un vistazo a estos dos peladores de verduras. ¿Qué observas? ¿Cuál puede ser utilizado por un grupo más amplio de personas?



FUENTE: peladores de verduras de thechefsco y OXO

El pelador de verduras OXO fue creado por un diseñador casado con una mujer que padecía artritis y tenía dificultades para pelar manzanas (Wilson, 2018). Su colaboración dio lugar a una herramienta que satisfacía las necesidades de ella (más fácil de sujetar y colocar), así como a muchas otras personas, como los niños. Pueden utilizarlo tanto las personas con tono muscular bajo como cualquiera que haya pelado un millón de patatas para preparar una celebración familiar.

Otro ejemplo de diseño universal son los subtítulos ocultos (Meyer y Rose, 2005). Al principio, las personas sordas tenían que comprar costosos convertidores para poder utilizar los televisores, que no estaban diseñados pensando en ellas. Con el tiempo, la tecnología se incorporó a todos los televisores, por lo que ahora tanto las personas sordas como las oyentes pueden utilizar los subtítulos. Los subtítulos también ayudan a las personas con diferencias de procesamiento.

En ambos casos, la innovación beneficia tanto a las personas con discapacidad como a las personas sin discapacidad. De hecho, los diseños mejoran para todos cuando son más accesibles. Esto podría parecer una forma encubierta de dar prioridad a las necesidades de las personas sin discapacidad. Sin embargo, la cuestión está relacionada con la complejidad de las personas, tanto con discapacidad como sin ella. Yo no tengo artritis, pero me encanta el pelador de verduras OXO porque me permite pelar más patatas. No soy sorda, pero me encantan los subtítulos porque me ayudan a procesar mejor el lenguaje, así como a seguir la narración mientras mi perro ladra. Cuando un diseño es sencillo, inclusivo y compatible con la variabilidad humana, tiene el potencial de convertirse en parte de nuestro paisaje vital.

DISEÑO UNIVERSAL PARA EL APRENDIZAJE

El UDL fue desarrollado en la década de 1980 en Boston por un grupo de médicos clínicos de la organización que más tarde se denominó «CAST» (Meyer et al., 2014). Inspirándose en el diseño universal, el UDL es un marco educativo que busca crear escuelas inclusivas mediante un diseño que tenga en cuenta desde el principio la variabilidad natural de los alumnos.

El UDL es radical porque sitúa el problema en nuestras aulas y escuelas, y no en los niños, alineándose con el modelo social de la discapacidad (Waitoller y King Thorius, 2016). Es radical porque conceptualiza a los alumnos como seres complejos, es decir, reconoce la variabilidad de los alumnos. Es radical porque el objetivo de la escolarización no es la memorización, sino el desarrollo como pensador experto y estratégico. Aunque muchos marcos educativos se centran únicamente en el contenido (en el UDL, el área de Representación), el UDL se centra igualmente en la emoción, el afecto (Compromiso) y el desarrollo estratégico (Acción y Expresión).

Analicemos el UDL explorando sus características clave:

Comprender la variabilidad de los alumnos

Desarrollar alumnos expertos

Aprovechamiento de las redes interconectadas del cerebro

Comprender la variabilidad de los alumnos

En el UDL, los alumnos se conceptualizan a través de una lente de variabilidad del alumno, que proviene de las ciencias del aprendizaje (Rose, 2017), un concepto que es más amplio que las etiquetas de discapacidad y se aplica a todos y cada uno de los seres humanos. Cada individuo tiene un cerebro único, creado a través de la interacción dinámica entre la genética y la experiencia (Rose, 2017). Las personas varían según el contexto: los estudiantes pueden prestar atención de manera diferente en casa y en la escuela. También variamos en cómo vemos, oímos y nos movemos. Variamos en nuestra capacidad para recordar datos matemáticos, así como en nuestras formas de prestar atención. Los alumnos varían en su respuesta emocional a las matemáticas. Y variamos en cómo desarrollamos estrategias en matemáticas.

Piénsalo

¿En qué se diferencian los alumnos de su clase de matemáticas? ¿Varían en su forma de prestar atención? ¿En su memoria? ¿En su entusiasmo por las matemáticas? ¿En sus conocimientos previos? ¿En qué otros aspectos varían?

¿Refleja el enfoque educativo predominante este hecho fundamental de la diferencia individual? En realidad, no. Los investigadores educativos están capacitados para ver los promedios de una población, no en cómo las personas difieren de esos promedios (Rose, 2017). Un estudio de investigación descubre que un enfoque funciona para el promedio y se determina que es una práctica basada en la evidencia, a pesar de la posible amplia variabilidad en quién se beneficia. Cuando simplificamos y aplanamos las diferencias individuales, a veces terminamos sin describir a nadie. También podemos pasar por alto elementos críticos de CÓMO aprenden los estudiantes, particularmente aquellos que se encuentran en los márgenes.

La ciencia que ha surgido para ayudarnos a comprender la complejidad de los individuos y su desarrollo se denomina teoría de los sistemas de desarrollo dinámico, que forma parte de las ciencias del aprendizaje (Osher et al., 2020). Rose (2017) y otros científicos especializados en diferencias individuales han documentado lo variable que es el desarrollo. Una pionera de este enfoque, Esther Thelen (2005), descubrió que los bebés aprenden a gatear de diferentes maneras y en diferentes momentos. Sin embargo, no había un conjunto ilimitado de vías: los bebés tendían a seguir una de varias vías de desarrollo. Se han encontrado resultados similares en matemáticas (Siegler, 2007), lo que nos recuerda las múltiples vías de desarrollo en un panorama de aprendizaje, en lugar de una escalera lineal de desarrollo. Aunque los seres humanos son muy variables, podemos utilizar patrones a lo largo de esa variabilidad para planificar para amplios grupos de niños. El UDL nos pide que diseñemos a lo largo de la variabilidad, entendiendo el desarrollo como algo complejo.

La variabilidad de los alumnos no sustituye al concepto de discapacidad; ambos pueden coexistir. La discapacidad es una identidad, una comunidad y un movimiento político en favor de la justicia para las personas discapacitadas. La variabilidad de los alumnos se aplica a todos, incluidos los discapacitados. Ciertos aspectos de la variabilidad humana se han etiquetado como discapacidades. Y cada persona con una discapacidad es única, variable en más dimensiones de las que sugiere su categoría de discapacidad.

Aunque los seres humanos son muy variables, podemos utilizar patrones a través de esa variabilidad para planificar para

grupos amplios de niños.

Pensemos, por ejemplo, en el trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH). Desde la perspectiva de la neurodiversidad, las personas con TDAH tienen una serie de dificultades relacionadas con la atención y otra serie de fortalezas relacionadas con ellas. Según el modelo social, el problema del TDAH no reside en el alumno individual, sino en las aulas, que a menudo parecen diseñadas específicamente para penalizar las diferencias en la atención. Nuestro sistema escolar exige que los estudiantes presten atención de maneras particularmente exigentes y limitadas. Por ejemplo, la capacidad de mantener una hiperconcentración en los proyectos, típica de las personas con TDAH, no está permitida en la escuela porque no encaja en los horarios estructurados de la mayoría de las escuelas, donde los estudiantes tienen que pasar de una clase a otra cada 45 minutos. Por lo tanto, aunque existen diferencias en la atención, son los estrechos límites de nuestro sistema escolar los que crean las condiciones discapacitantes del TDAH. Utilizando un modelo de variabilidad del alumno, podemos centrarnos en las amplias diferencias de atención en todos los contextos para todos nuestros alumnos. El TDAH sigue siendo una identidad, sigue siendo una comunidad y una diferencia individual que se encuentra en un continuo entre los seres humanos. La variabilidad del alumno no niega la identidad o la comunidad de la discapacidad.

En este libro, situé la discapacidad en el centro del debate. Sin embargo, muchos de los textos populares sobre el UDL rara vez mencionan la discapacidad (Lambert, Greene, et al., 2022). Supongo que evitan mencionar la discapacidad por una razón específica: intentan animar a los educadores generales a ver el UDL como un marco útil para todos los niños. ¡Y lo es! Sin embargo, el UDL comenzó con la discapacidad porque estos estudiantes están marginados en nuestras aulas y escuelas. Y, más aún, como sostengo a lo largo de este libro, al proporcionar acceso a los estudiantes neurodiversos podemos transformar las matemáticas.

La variabilidad de los alumnos también puede confundirse con una idea más antigua de los estilos de aprendizaje. Un error común es pensar que cada alumno tiene un único estilo de aprendizaje dominante, como el aprendizaje visual o el aprendizaje verbal. Sin embargo, ninguno de nosotros aprende solo a través de una modalidad. Sí, todos participamos de manera diferente en el aprendizaje (i)variabilidad del alumno!), pero no hay patrones estáticos y fijos en la forma en que cada individuo aprende en todas las situaciones (Rogowsky et al., 2015).

Un error común es pensar que cada estudiante tiene un único estilo de aprendizaje dominante, como el aprendizaje visual o el aprendizaje verbal. Sin embargo, ninguno de nosotros aprende solo a través de una modalidad.

Rita, a quien conocí en las mismas aulas que Luis en el capítulo 2, realizó un test de estilos de aprendizaje en sexto curso. Me explicó que su puntuación le indicaba que «no era una persona que aprendía de forma visual». Visité a Rita en su clase casi 30 veces durante sus cursos de sexto y séptimo. La vi en múltiples ocasiones utilizando esta forma de entenderse a sí misma («no soy una persona que aprende de forma visual») de una manera que limitaba su aprendizaje.

En séptimo grado, me senté a su lado mientras trabajaba en un problema de números enteros relacionado con el nivel del mar. El problema decía lo siguiente: Una exploradora subió una montaña de 5430 pies de altura. Bajó y se zambulló en un lago al pie de la montaña a una profundidad de 600 pies. ¿Cuál fue la distancia vertical total que exploró ese día? Rita y su grupo tenían dificultades para resolver este problema, ya que no sabían qué reglas de suma y resta de números enteros aplicar. Habían escrito 5430 positivo y 600 negativo, pero no sabían si sumar o restar. Le sugerí a Rita que dibujara la situación. Rita me miró con cara de dolor y me recordó que «no era una persona visual» y que «las rectas numéricas no me sirven». Le sugerí amablemente que tal vez le ayudaría, solo en esta situación. Ella dibujó la situación y al instante se dio cuenta de que tenía que sumar las dos distancias. Los profesores de sexto curso de Rita (el Sr. Pierce y la Sra. Scott) se habrían entristecido mucho al saber que este era el resultado de su test de estilos de aprendizaje. No era su intención hacer sentir a Rita que no podía entender las rectas numéricas, que nunca iba a aprender a través de

elementos visuales. Puede que Rita no prefiera las rectas numéricas en algunas situaciones, pero en otras le funcionan. Las ideas estáticas sobre los estilos de aprendizaje pueden limitar a los alumnos.

Expertos en aprendizaje en el UDL

El UDL se basa en dos campos de investigación interconectados: las ciencias del aprendizaje y la neurociencia. Las ciencias del aprendizaje son un campo académico que estudia el aprendizaje en múltiples disciplinas. Un principio básico de las ciencias del aprendizaje es que las personas aprenden prácticas complejas, como las matemáticas, a través de la participación sostenida en esas prácticas (Academias Nacionales de Ciencias, Ingeniería y Medicina, 2018). Aprender matemáticas no es solo aprender contenidos matemáticos, sino también aprender a hacer matemáticas. La investigación en ciencias del aprendizaje influyó en el objetivo del UDL: alumnos expertos. En lugar de conceptualizar el objetivo como el aprendizaje de contenidos concretos por parte de los alumnos, el objetivo del UDL es que los alumnos se conviertan en alumnos expertos y estratégicos a lo largo de su vida.

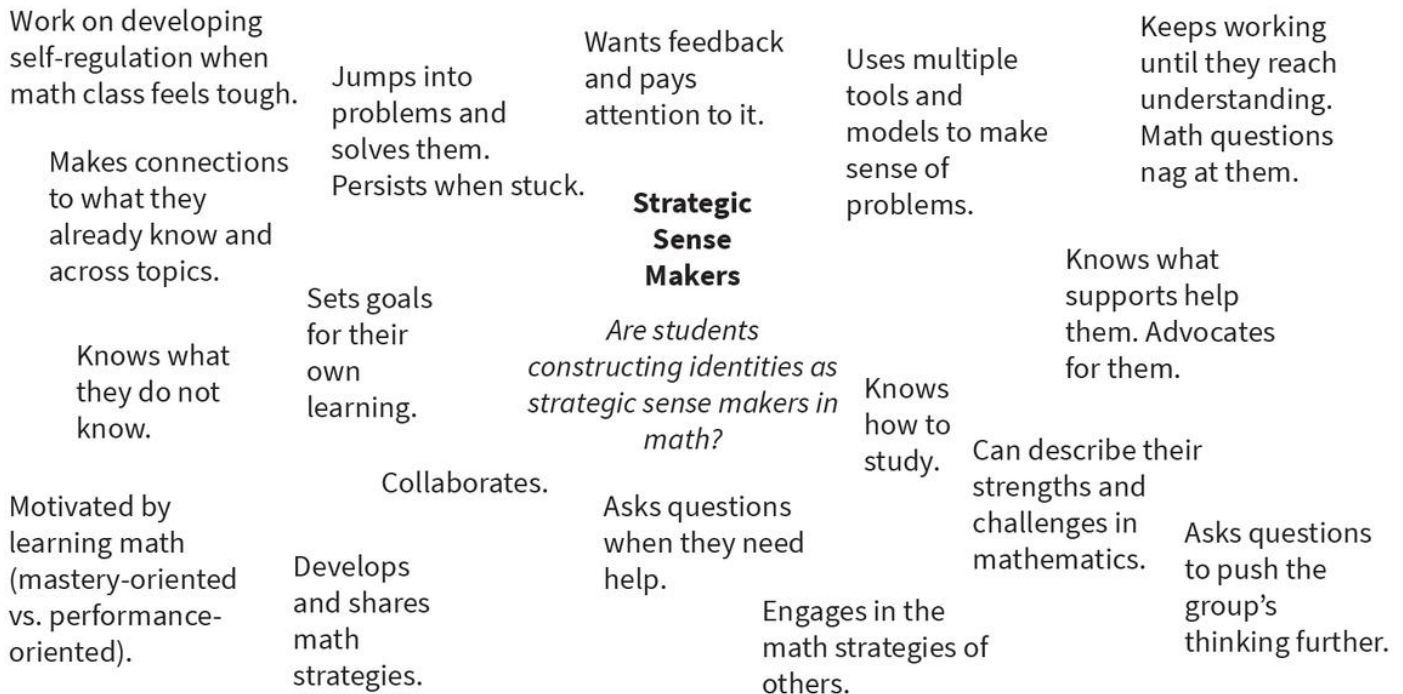
En lugar de conceptualizar el objetivo como el aprendizaje de contenidos concretos por parte de los estudiantes, el objetivo del UDL es que los estudiantes se conviertan en aprendices expertos y estratégicos a lo largo de toda su vida.

Se trata de una diferencia transformadora en el propósito de la escolarización, especialmente para los estudiantes que han sido marginados por las aulas de matemáticas tradicionales. Tan pronto como se considera que un estudiante tiene «dificultades», el enfoque de su educación tiende a limitarse únicamente al contenido y las habilidades. El UDL centra nuestra atención en la participación en lo que realmente hacen los matemáticos, tal y como se refleja en los Estándares de Práctica Matemática (SMP; Centro de Mejores Prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores y Consejo de Directores de Escuelas Estatales, 2010). Los SMP reflejan décadas de investigación sobre la importancia de las prácticas matemáticas, o sobre las formas en que los matemáticos y los estudiantes de matemáticas exitosos se involucran en actividades matemáticas como la resolución de problemas, la modelización y la demostración. El acceso a la resolución de problemas y a la demostración matemática ayuda a desarrollar la agencia en matemáticas, o la sensación de ser capaz de resolver y persistir en la resolución de matemáticas complejas (Boaler y Sengupta-Irving, 2016).

Piénsalo

¿Qué verías u oirías de los estudiantes que fueran expertos en matemáticas?

What is an expert learner in mathematics?



Para mí, un experto en matemáticas es alguien que tiene un sentido estratégico. En mis años como educador especial y educador general enseñando matemáticas, lo que más me preocupaba de los estudiantes era ver que constantemente no entendían las matemáticas. Algunos estudiantes, cuando se les presentaba un problema verbal, me preguntaban una y otra vez qué operación debían utilizar. Estos hábitos eran más pronunciados en los estudiantes que habían experimentado una enseñanza matemática memorística y limitada en cursos anteriores. Estos estudiantes esperaban que los profesores les dijeran qué procedimiento debían utilizar. En educación especial, tenemos un término para esto: indefensión aprendida. A menudo lo utilizamos para referirnos a los alumnos con discapacidades a los que no se les permite pensar por sí mismos, lo que les lleva a desarrollar el hábito de depender de los adultos para que les guíen. En este caso, el enfoque en la reproducción y la memorización de las matemáticas, en lugar de en el desarrollo de la capacidad de dar sentido a las cosas por parte del alumno, fomenta hábitos que pueden no serle útiles a largo plazo.

APROVECHAR LAS REDES INTERCONECTADAS DEL CEREBRO

Los investigadores del UDL, entre los que se encuentran académicos de neurociencia y educación, identificaron tres redes interconectadas del cerebro que influyen significativamente en el aprendizaje: el compromiso, la representación y la acción estratégica (Meyer et al., 2014). Estas tres áreas de aprendizaje constituyen la base de las directrices del UDL. La primera red, denominada aquí «compromiso», es afectiva y participa en la forma en que procesamos nuestras emociones y afectos. Los investigadores del UDL han prestado mucha atención al papel fundamental que desempeñan los procesos sociales y emocionales en el aprendizaje. La segunda red, «representación», es el reconocimiento, que interviene en la forma en que reconocemos los objetos y los patrones del entorno. La tercera red, «acción estratégica», interviene en la forma en que planificamos y supervisamos nuestras acciones, incluido el aprendizaje. Estas tres redes trabajan juntas en el complejo proceso de aprendizaje en áreas de contenido como las matemáticas. Considero que estas tres dimensiones son muy útiles cuando las utilizamos como diferentes lentes para observar el aprendizaje. Con demasiada frecuencia, nos centramos únicamente en el contenido. ¿Qué están aprendiendo los alumnos y cómo se lo enseñaremos? Las tres dimensiones del UDL nos recuerdan que el aprendizaje es, ante todo, emocional y que desarrollar la autocomprensión de los alumnos es tan importante como el contenido que enseñamos.

Compromiso

Las emociones afectan al compromiso y, por lo tanto, al aprendizaje de manera profunda y fundamental (Immordino-Yang y Damasio, 2007). Todos los estudiantes eligen si se comprometen con las matemáticas: o creamos las condiciones para ello o no lo hacemos. Los estudiantes experimentan emociones fuertes en la clase de matemáticas que afectan a su identidad como estudiantes de matemáticas y a su capacidad y voluntad de comprometerse (Lambert, 2019). Para comprometerse plenamente con las matemáticas, los estudiantes necesitan oportunidades para trabajar con matemáticas significativas que les resulten relevantes y desafiantes. Los estudiantes también señalan la importancia de un entorno de clase que les apoye, en el que se sientan lo suficientemente cómodos como para asumir riesgos, como compartir sus respuestas en clase, así como la importancia de la colaboración (Boaler y Sengupta-Irving, 2016).

Representación

¿Cómo presentamos la información a los estudiantes en matemáticas? ¿Y qué representaciones utilizan los estudiantes para resolver problemas? Aunque las representaciones que hacen los estudiantes suelen incluirse en el UDL bajo la acción estratégica, yo las traslado a la categoría de representación. En matemáticas, consideramos que la representación es fundamental, tanto las representaciones que modelamos para los estudiantes como las que ellos adoptan. El área de la representación en matemáticas también incluye cómo secuenciamos y diseñamos la enseñanza. Otro componente fundamental es centrarse en las ideas básicas, invirtiendo en los contenidos más importantes para los alumnos.

Acción estratégica

La acción estratégica es la categoría que se refiere a cómo nosotros, como alumnos, planificamos nuestra respuesta a los estímulos. A medida que desarrollamos estrategias en matemáticas, o en metacognición, nos volvemos más planificadores en nuestra respuesta a la enseñanza de las matemáticas. Podemos desarrollar estrategias de autorregulación (ser conscientes de nuestras emociones y controlarlas) y de funcionamiento ejecutivo (planificación y organización). Esta área también incluye la forma en que damos retroalimentación a los alumnos, que es cómo ellos desarrollan estas estrategias. La evaluación, por lo tanto, es una característica fundamental de esta área.

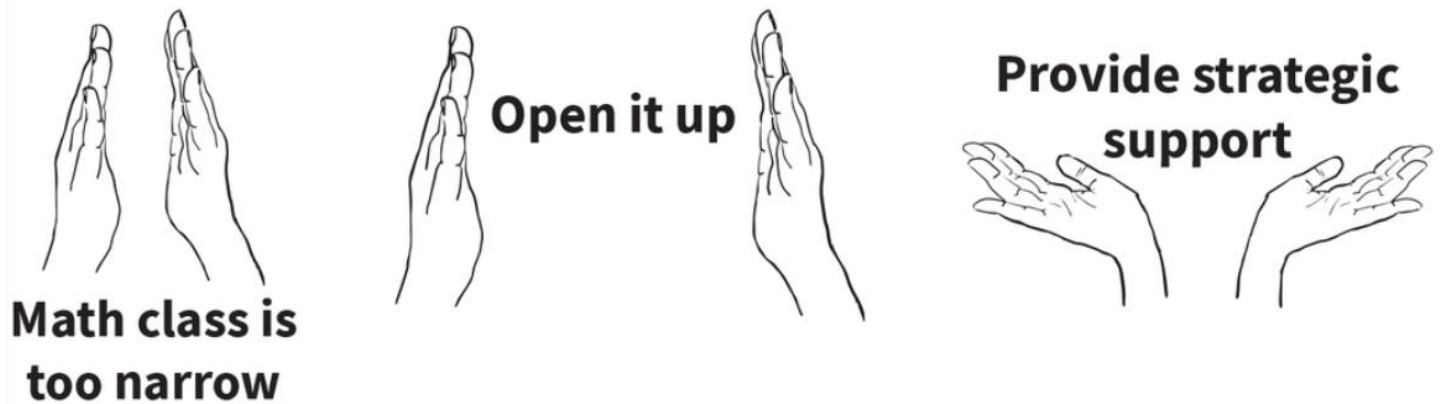
UDL MATEMÁTICAS

He diseñado UDL Math para centrar las matemáticas como una práctica humana: los profesores como diseñadores y los alumnos como agentes resolutivos de problemas. UDL Math proporciona un modelo para el diseño creativo y empático de experiencias de aprendizaje matemático que comienza con los alumnos marginados. Esto incluye a los alumnos con discapacidades, así como a los alumnos que han sido marginados en matemáticas debido a su raza, cultura, idioma, género u orientación sexual. UDL se alinea con la pedagogía culturalmente sensible si realmente podemos centrar las experiencias de los estudiantes de color en nuestro trabajo (Waitoller y King Thorius, 2016).

UDL se alinea con la pedagogía culturalmente sensible si realmente podemos centrar las experiencias de los estudiantes de color en nuestro trabajo.

En esta sección, exploraremos algunos elementos críticos en matemáticas de tres redes UDL: compromiso, representación y acción estratégica. La figura 5.1 describe seis elementos importantes a tener en cuenta al diseñar experiencias matemáticas accesibles. No se trata de una lista de verificación (¡y no debe convertirse en una!), sino de una forma de explorar varios elementos importantes en nuestras aulas. Los diseñé basándome en investigaciones sobre las ciencias del aprendizaje, la educación matemática y la educación especial. También integré el análisis de las experiencias de personas con discapacidades, tanto de memorias como de estudios de entrevistas. Cada sección comienza con una cita de un adulto con dislexia o discalculia que reflexiona sobre su experiencia en el aprendizaje de las matemáticas. Al fin y al cabo, ellos son los expertos en su propia experiencia, y los pongo en primer plano para recordarnos a todos que debemos escuchar a nuestros estudiantes. En cada sección, volvemos a los tres gestos del capítulo 1. Comenzamos por comprender las barreras que existen en nuestras aulas (cómo las clases de matemáticas

son demasiado limitadas), luego cómo podemos abrir nuestras aulas y, por último, el apoyo estratégico adicional que podemos necesitar ofrecer.



Oportunidad para la resolución significativa de problemas matemáticos

Las matemáticas son «difíciles» porque son aburridas y requieren mucho tiempo. Los deberes suelen consistir en hacer el mismo problema 40 veces seguidas. Al día siguiente, hacemos otros 40 problemas iguales, pero con un dígito más de complejidad. Las páginas se suceden, una procesión interminable de papeleo aburrido, una rutina de problemas sin interés. Lo que no consigo entender es que las clases «más difíciles» son aquellas en las que las matemáticas se vuelven mucho más interesantes. En lugar de 40 problemas aburridos, te dan cinco interesantes. En lugar de ejercicios sin sentido, puedes empezar a ver cómo utilizar las matemáticas como herramienta. Por fin te dan un montón de tabloneros y te dejan empezar a clavar cosas (Young, 2011, p. 119). ●

Shamus Young, un adulto etiquetado con una discapacidad de aprendizaje que reflexiona sobre su experiencia en las escuelas, describió las clases de matemáticas como llenas de trabajo aburrido y repetitivo, lo que hace que las matemáticas sean «difíciles». Contrastó esto con las matemáticas reales, en las que podía interesarse por los problemas y dedicarse a buscar soluciones. Los estudiantes no solo necesitan oportunidades para resolver problemas significativos y atractivos, sino que también necesitan hacerlo de forma constante. Queremos que la clase de matemáticas sea un lugar en el que los estudiantes esperen encontrar retos y participar.

Algunas barreras para la participación de los estudiantes en la resolución de problemas incluyen

La falta de problemas matemáticos atractivos, relevantes e interesantes.

Una enseñanza que no da a los alumnos la oportunidad de pensar por sí mismos.

La falta de oportunidades puede crear una indefensión aprendida, cuando los estudiantes no saben cómo empezar a resolver un problema o qué hacer si se atascan.

La falta de oportunidades para resolver problemas de forma colaborativa.

Podemos abrir las aulas de matemáticas

Dando a los alumnos muchas oportunidades para resolver problemas matemáticos atractivos, relevantes, interesantes y accesibles

Dar a los alumnos la libertad de pensar por sí mismos en los problemas

Dar a los alumnos la oportunidad de colaborar con sus compañeros para resolver problemas.

Podemos apoyar a los alumnos

Orientándolos estratégicamente sobre cómo abordar un problema difícil, así como qué hacer cuando se quedan atascados

Emparejándolos con otros estudiantes con los que trabajan bien para que adquieran el hábito de resolver problemas.

Crear estructuras para la resolución de problemas que fomenten la participación y la colaboración

ENGAGEMENT



Do your students feel safe enough to take mathematical risks?

Are they building relationships in and through math?

Poco después de entrar en cuarto curso, la verdad salió a la luz. Aunque podía recitar los números y las tablas de multiplicar que había memorizado, para mí no eran más que símbolos con nombres numéricos que no significaban nada. No entendía los conceptos que había detrás de ellos. Ante la avalancha diaria de conceptos matemáticos cada vez más difíciles, ya no podía negar que había un problema. Empecé a bloquearme por completo. Me sentía incapaz de hacer frente a la situación y, por primera vez, tomé conciencia del hecho de que no entendía las cosas que mis compañeros entendían. Empecé a sentirme cada vez menos cómoda en la escuela. Me angustiaba que alguien descubriera que no lo entendía todo. Siempre me sentía más vulnerable durante la clase de matemáticas. (Abeel, 2005, p. 22) ●

En sus memorias sobre su infancia con discalculia y ansiedad matemática, Samantha Abeel describió la transición al cuarto curso, cuando se le pidió que hiciera algo más que memorizar. Tenía grandes dificultades para comprender los conceptos y símbolos matemáticos, lo cual es una forma útil de entender la discalculia. Describió cómo se sentía visceralmente: empezó a sentir una ansiedad extrema, a sentirse «vulnerable» durante la clase de matemáticas y a «bloquearse».

Esta sensación de vulnerabilidad en la clase de matemáticas, de miedo a que le pregunten o le llamen la atención por no saber algo de matemáticas, es un problema que va mucho más allá de Samantha o la discalculia. Los estudiantes pueden sentirse inseguros cuando se equivocan en la clase de matemáticas (Bibby, 2002). Las matemáticas son una asignatura profundamente emocional, en la que los estudiantes pueden sentir alegría, pero a menudo refieren ansiedad y dolor. Es la única asignatura con su propia ansiedad: la ansiedad matemática. Si bien todos los estudiantes, incluidos los de alto rendimiento, pueden experimentar ansiedad matemática, los estudiantes con discapacidades la padecen en mayor medida que los estudiantes sin discapacidades (Devine et al., 2018). Como profesores, queremos ayudar a los estudiantes a sentirse lo suficientemente seguros como para resolver problemas y asumir riesgos matemáticos. Las relaciones sólidas con los profesores son especialmente importantes en la clase de matemáticas (Battey et al., 2016).

Algunas barreras para la participación de los estudiantes incluyen

Que los estudiantes perciban que no son «buenos en matemáticas».

Ser puestos en evidencia o sometidos a la presión de exámenes cronometrados o de alto riesgo.

Sentirse juzgados por una respuesta incorrecta.

Podemos abrir las aulas de matemáticas

Transmitiendo a los alumnos el mensaje de que las matemáticas consisten en reflexionar sobre los problemas y compartir el trabajo, no en la velocidad o la perfección: ¡los errores nos ayudan a crecer!

Restando importancia a la competencia y la velocidad en la clase de matemáticas y haciendo hincapié en la colaboración y el tiempo para pensar.

Dar a los alumnos oportunidades para resolver problemas matemáticos con sus compañeros

Podemos apoyar a los alumnos

Trabajando con los alumnos para remodelar su autocomprensión como estudiantes de matemáticas.

Preparar a los alumnos para que compartan sus estrategias haciéndoles compartirlas primero con un profesor, un asistente o un amigo.

Utilizar el coaching estratégico sobre cómo gestionar la ansiedad.

Matemáticas multimodales

REPRESENTATION



*Is math content accessible? Multimodal?
Can students choose how they solve problems?
Are representations connected to each other? To concepts?*

La primera vez que noté que había algo diferente en mi cerebro fue en la escuela primaria. En aquella época, la discalculia no era una condición reconocida, al menos no en ninguna de las escuelas a las que asistí. En cuanto se esperaba de mí que separara las ayudas visuales de las matemáticas, se convirtió en un problema para mí. Podía entender las matemáticas cuando veía las cosas que había que contar, incluso mis dedos. Al eliminar esto, se rompió mi frágil relación con las matemáticas. Nadie entendía por qué no podía comprender estos conceptos supuestamente sencillos. Mi recuerdo de aquella época es que había muchos profesores que simplemente no entendían por qué podía destacar en ciertas materias y suspender estrepitosamente en todo lo relacionado con las matemáticas. (LozMac, 2018, párr. 1) ●

Loz Mac escribió sobre la conexión entre las imágenes y la comprensión matemática. Los múltiples medios de representación son importantes para el acceso, especialmente para los estudiantes con discapacidades sensoriales. Los estudiantes sordos no pueden acceder a las matemáticas si no se les da acceso a las discusiones del profesor y sus compañeros a través de un traductor. Los estudiantes ciegos no pueden acceder a las matemáticas si no se les comunican los elementos visuales, por ejemplo, a través de ábacos especialmente diseñados o tecnologías táctiles que pueden modelar gráficos en 3D. Como demuestra esta cita, los elementos visuales también pueden ser fundamentales para la comprensión matemática de los estudiantes con discalculia.

Los múltiples medios de representación son importantes para el acceso, especialmente para los estudiantes con discapacidades sensoriales.

El UDL exige múltiples representaciones del contenido. En matemáticas, estas representaciones visuales SON el contenido, no simplemente «elementos visuales». La recta numérica, las matrices y las ecuaciones son en sí mismas múltiples representaciones del contenido matemático. Necesitamos (a) proporcionar múltiples representaciones y (b) crear conexiones entre ellas. Las fracciones, por ejemplo, son un concepto que debe entenderse a través de múltiples representaciones (Lamon, 2007). En lugar de limitarse a mostrar a los estudiantes el área y otros modelos de fracciones, necesitamos facilitar su comprensión de cómo se conectan las representaciones, así como ayudarles a ver la equivalencia entre ellas.

Este enfoque también se relaciona con la elección de los alumnos en cuanto a las representaciones que utilizan para resolver problemas. Los alumnos quieren resolver los problemas de una manera que tenga sentido para ellos (que puede tener sentido para nosotros o no). A los alumnos del capítulo 1 que resolvieron el problema de las 12 sillas se les dio libertad para resolver el problema utilizando dibujos, manipulativos o ecuaciones numéricas. No se les impuso cómo resolverlo ni qué método utilizar.

Algunas barreras para el aprendizaje de los estudiantes en el área de la representación incluyen

Una enseñanza de las matemáticas inaccesible porque solo se utiliza una modalidad.

Supuestos de que los alumnos ya comprenden modelos matemáticos como la recta numérica.

Limitar a los alumnos a resolver problemas utilizando solo determinados métodos y/o representaciones.

Podemos abrir las aulas de matemáticas

Proporcionando de forma rutinaria acceso multimodal al contenido matemático y a la interacción en la clase de matemáticas

Utilizando múltiples representaciones en la forma de presentar los contenidos

Permitir a los alumnos resolver problemas de la forma que les resulte más lógica

Podemos proporcionar apoyo a los alumnos mediante

Diseñando una enseñanza que les enseñe sistemáticamente representaciones matemáticas complejas, como la recta numérica

Guiar a los alumnos para que sean estratégicos en las representaciones que utilizan para resolver problemas.

Invertir tiempo en ideas fundamentales

REPRESENTATION



Does the design of instruction guide students to understand core mathematical ideas? Mathematical representations? Develop strategies?

Aprender... simplemente aprender muy rápido. Me lleva tiempo. Podría decirte que me lleva bastante tiempo aprender, especialmente en matemáticas. Es mi peor asignatura. Podría llevarme semanas aprender una sola cosa. Hay muchas materias que puedo aprender y luego las olvido muy rápido, lo vuelvo a hacer, vuelvo a aprender. Para

mí, es solo aprenderlo en ese momento, en una hora, hora y media, la clase que tenemos. Me lleva un par de clases familiarizarme con la materia.

—Entrevista con Santiago, en Connor, 2007, p. 205 ●

Una barrera fundamental para los estudiantes neurodiversos que aprenden matemáticas es el tiempo, como señaló Santiago, un joven con una discapacidad de aprendizaje; algunos estudiantes tardan más en aprender el mismo contenido. Los estudiantes sienten que la clase de matemáticas avanza a un ritmo que les resulta imposible, pueden sentirse presionados por los exámenes cronometrados y, en general, sienten que no tienen tiempo suficiente para aprender. ¡Es posible que a los estudiantes les disgusten las guías de ritmo tanto como a nosotros, los profesores! Entonces, ¿cómo les damos a los estudiantes el tiempo que necesitan?

El primer paso en este proceso es priorizar las ideas fundamentales de las matemáticas. Piensa en las matemáticas de K-8 como una estructura física, como una casa o un edificio escolar. Ciertas ideas matemáticas son como muros de carga: sin ellas, toda la estructura se derrumbaría (Freitag, 2021). Otras ideas matemáticas son como paneles de yeso o enlucido: importantes para completar la estructura, pero no vitales para sostener la casa. Lo que tenemos que hacer es averiguar qué ideas son portantes e invertir tiempo en estas ideas fundamentales. Por lo tanto, es esencial planificar cuidadosamente para que los alumnos inviertan su valioso tiempo en lo que es más importante.

Una idea fundamental es la de la equivalencia en fracciones. Los alumnos deben comprender la equivalencia para entender cómo funcionan las fracciones: las fracciones equivalentes tienen la misma relación entre el numerador y el denominador. Son iguales, aunque sean diferentes. Y este concepto complicado es necesario para operaciones como la suma y la resta de fracciones, y para el álgebra.

El segundo paso es proporcionar tiempo suficiente para que los alumnos aprendan realmente los conceptos, las habilidades y las estrategias que valoramos. Los alumnos necesitarán experimentar temas como las fracciones equivalentes de múltiples maneras a lo largo del tiempo. Una vez que lo comprendan, necesitarán practicar para no olvidarlo.

Podemos diseñar secuencias de tareas y actividades que involucren a los alumnos en las ideas fundamentales. Las ideas fundamentales también pueden ayudarnos a limitar las tareas excesivas y repetitivas, otra barrera para los alumnos. En lugar de hojas de ejercicios con muchos problemas, las clases y los deberes deben incluir un número menor de problemas centrados en las ideas fundamentales. Las ideas fundamentales también ayudan cuando necesitamos modificar la enseñanza para los alumnos con discapacidad intelectual, ya que estos alumnos suelen necesitar más tiempo con las ideas fundamentales (Krähenmann et al., 2019). Los estudiantes con diferencias de memoria también necesitarán apoyo para retener conceptos, por ejemplo, en forma de práctica distribuida.

Para identificar las ideas fundamentales, sugiero consultar las páginas de Achieve the Core para cada nivel de grado, que incluyen los estándares más importantes para cada grado (<https://bit.ly/3rwktDw>). Otra fuente son las páginas introductorias de cada nivel de grado en los Estándares Estatales Comunes (Centro de Mejores Prácticas de la Asociación Nacional de Gobernadores y Consejo de Directores de Escuelas Estatales, 2010), que se centran en las ideas principales. También trato de asegurarme de que realicemos múltiples tareas en nuestra enseñanza. Cuando un estudiante está aprendiendo la suma y la resta de varios dígitos y, al mismo tiempo, está desarrollando su comprensión de la recta numérica (capítulo 9), por ejemplo, sé que su tiempo está siendo bien aprovechado.

Algunas barreras para el aprendizaje de los alumnos en esta área de representación incluyen

Una enseñanza de las matemáticas que se percibe como apresurada, en la que no se da a los alumnos tiempo suficiente para desarrollar su comprensión.

Mensajes a los alumnos de que ser bueno en matemáticas es ser rápido.

El paso de un tema a otro sin conexiones entre ellos.

Podemos abrir las aulas de matemáticas

Dando tiempo a los alumnos que lo necesitan

Ofrecer práctica revisando ideas anteriores mediante rutinas como cadenas numéricas o juegos.

Recordar a los alumnos que las matemáticas no solo tienen que ver con la velocidad, sino que desarrollar la comprensión lleva tiempo

Podemos apoyar a los alumnos

Diseñando una enseñanza que proporcione suficiente apoyo para las ideas fundamentales

Utilizar rutinas de enseñanza coherentes (en las que el contenido cambia, pero la estructura de la rutina es coherente)

Desarrollar nuestra propia comprensión de las ideas fundamentales que enseñamos.

Retroalimentación equitativa

STRATEGIC ACTION



*Does feedback help students grow as mathematicians?
Is assessment equitable for all learners?*

EN OCTAVO CURSO, había aprendido los procedimientos matemáticos correctos, pero aún necesitaba tiempo adicional. En esa clase hacíamos «matemáticas rápidas», lo que me provocaba una ansiedad terrible y por lo que haría casi cualquier cosa para evitarlo. La tarea de este ejercicio consistía en completar una página entera de cálculos en cinco minutos. Me llevaba el libro a casa a escondidas la noche anterior, respondía a todas las preguntas y luego escribía las respuestas en mi libro con lápiz; al día siguiente, en clase, solo tenía que copiar mis respuestas. Era la única forma en que podía completar el ejercicio en el tiempo asignado. Aunque había hecho el trabajo (en casa), me sentía como un fraude. (Arrowsmith-Young, B., 2013, p. 21) ●

La cuestión de la retroalimentación y la evaluación es fundamental para todos los estudiantes de matemáticas, pero, una vez más, es especialmente importante para aquellos que pueden necesitar apoyo adicional. En esta cita, Barbara Arrowsmith-Young, que tiene una discapacidad de aprendizaje, critica una práctica de evaluación muy tradicional: los

exámenes cronometrados. Nerviosa por el examen en la escuela, encontró una manera de darse el tiempo extra que necesitaba, copiando las respuestas a lápiz en su libro la noche anterior.

La evaluación puede suponer un gran obstáculo para los alumnos con discapacidades, ya que las tareas excesivas e inútiles pueden suponer una carga para aquellos que necesitan más tiempo (Lambert, 2019). Los elementos de calificación de la escuela, como los deberes y la organización de las carpetas, discriminan a los alumnos cuyas discapacidades hacen que esos aspectos de la escuela les resulten especialmente difíciles. La evaluación debe centrarse en ayudar tanto al profesor como al alumno a realizar su trabajo con la mejor información posible.

Algunas barreras para el aprendizaje de los estudiantes en el área de la retroalimentación incluyen

Tareas largas y aburridas

Sistemas de calificación que discriminan por motivos de discapacidad

La falta de retroalimentación práctica o oportuna para los estudiantes. La retroalimentación solo puede llegar en forma de calificaciones o en un examen, demasiado tarde para que los estudiantes puedan actuar

Objetivos del Programa de Educación Individualizada (IEP) en matemáticas que están desconectados de la práctica en el aula

Podemos abrir las aulas de matemáticas mediante

Utilizando la evaluación para comprender a los estudiantes y responder a sus necesidades

Revisando nuestros sistemas de calificación para permitir a los alumnos demostrar su comprensión a lo largo del tiempo de diferentes maneras

Utilizar evaluaciones dinámicas o evaluaciones que proporcionen un andamiaje para medir con mayor precisión lo que los alumnos pueden hacer en contextos que les apoyan.

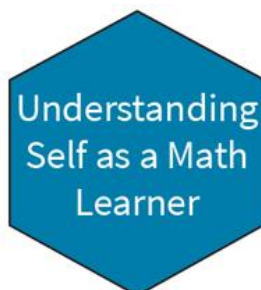
Podemos proporcionar apoyo a los alumnos mediante

Proporcionarles orientación estratégica sobre cómo pueden afrontar evaluaciones estresantes, como los exámenes de alto nivel.

Incluir a los alumnos en la evaluación, como la autoevaluación, para desarrollar su autocomprensión

Comprenderme a mí mismo como estudiante de matemáticas

STRATEGIC ACTION



What do your students learn about themselves as math learners?

How do you support strategic development?

ENTRE LAS VENTAJAS [del LD] estaba una mejor comprensión a una edad temprana de mis limitaciones y debilidades. Aunque esto pueda no parecer una gran ventaja, hay que recordar que cada persona tiene sus propias debilidades y

limitaciones. Por ejemplo, me di cuenta de que, para superar las matemáticas, debía dibujar los problemas. Este sistema me permitía visualizar lo que estaba tratando de hacer. (Garret Day, en Rodis et al., 2001, p. 99) ●

Para nuestro objetivo de ayudar a los alumnos a convertirse en creadores de sentido estratégicos, es fundamental la autocomprensión (Desoete y De Craene, 2019). Simplemente intentamos que nuestros alumnos reflexionen sobre su propio pensamiento y aprendan sobre su propio aprendizaje. Queremos que se conozcan a sí mismos como estudiantes de matemáticas y que sepan defender lo que necesitan.

Para muchos profesores de matemáticas, esta dimensión del aprendizaje (acción estratégica) será la más desconocida de las tres dimensiones del UDL. Podemos pensar en cómo desarrollar estrategias matemáticas y estrategias de resolución de problemas, pero no estrategias relacionadas con la autorregulación y la función ejecutiva. Sin embargo, estos procesos son fundamentales en nuestras aulas. Confiamos en que los alumnos sean capaces de manejar las exigencias organizativas de nuestras aulas, lo que requiere un funcionamiento ejecutivo. El funcionamiento ejecutivo se refiere al trabajo de la corteza prefrontal, incluyendo cómo planificamos el aprendizaje, así como la memoria de trabajo y la atención. También necesitamos que los alumnos desarrollen estrategias para negociar las exigencias emocionales de nuestras aulas: la autorregulación. La autorregulación se refiere a cómo los alumnos aprenden a gestionar sus emociones en situaciones difíciles. El paso más importante como profesor es reconocer que estas habilidades se pueden enseñar y que los alumnos pueden mejorar en estas áreas con nuestro apoyo. El objetivo final es que se comprendan a sí mismos como alumnos y, por lo tanto, sean capaces de defenderse por sí mismos en el futuro.

Algunas barreras para el aprendizaje de los estudiantes en el área de la comprensión de sí mismos como aprendices de matemáticas incluyen

No tener la oportunidad de reflexionar o discutir lo que funciona para ti como estudiante.

Aulas con poca flexibilidad o pocas opciones.

Podemos abrir las aulas de matemáticas

Hablar regularmente con nuestros alumnos sobre lo que les funciona.

Compartiendo lo que sabemos sobre nosotros mismos como estudiantes de matemáticas para modelar la metacognición

Permitir a los alumnos elegir cómo aprender

Podemos brindar apoyo a los alumnos mediante

Creando planes individuales para apoyar a los alumnos que necesitan una orientación más estratégica para comprender y gestionar sus emociones en la clase de matemáticas (autorregulación) o para mantenerse concentrados y organizados en clase (funcionamiento ejecutivo).

Hablando con los alumnos cuando tienen dificultades en clase, enseñándoles a reflexionar sobre lo que ha pasado y lo que podrían hacer la próxima vez.

Incorporar la autoevaluación y la autorreflexión como un hábito habitual en la clase

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Qué ha sido nuevo para usted en este capítulo sobre el UDL y/o las matemáticas UDL?
2. ¿Qué barreras para el aprendizaje de las matemáticas te han resultado familiares según tu experiencia como alumno? ¿Y como profesor?
3. ¿Cómo desarrollas la autocomprensión de los alumnos? ¿Las habilidades de autorregulación? ¿Las habilidades de funcionamiento ejecutivo?

Descripciones de imágenes y figuras

Habilidades de los creadores de sentido estratégico

El diagrama presenta una idea central etiquetada como «Creadores de sentido estratégico». ¿Están los alumnos construyendo identidades como creadores de sentido estratégico en matemáticas?

A continuación se enumeran las 17 habilidades que exhiben los creadores de sentido estratégico.

Trabajar en el desarrollo de la autorregulación cuando las clases de matemáticas resultan difíciles.

Establecen conexiones con lo que ya saben y entre diferentes temas.

Saben lo que no saben.

Motivarse por el aprendizaje de las matemáticas (orientado al dominio frente a orientado al rendimiento).

Desarrolla y comparte estrategias matemáticas.

Colabora.

Establece metas para su propio aprendizaje.

Se lanza a resolver problemas y los resuelve. Persiste cuando se atasca.

Desea recibir comentarios y les presta atención.

Utiliza múltiples herramientas y modelos para comprender los problemas.

Sigue trabajando hasta que alcanza la comprensión. Las preguntas de matemáticas le inquietan.

Sabe qué apoyos le ayudan. Aboga por ellos.

Hace preguntas para impulsar el pensamiento del grupo.

Puede describir sus puntos fuertes y sus dificultades en matemáticas.

Hace preguntas cuando necesita ayuda.

Sabe cómo estudiar.

Figura 5.1 • Elementos de diseño de matemáticas UDL

El diagrama describe seis elementos que deben tenerse en cuenta al diseñar experiencias matemáticas UDL. El diagrama se presenta como un círculo de seis hexágonos. En el centro se encuentra el objetivo de los elementos de diseño matemático UDL, que es facilitar la creación de sentido estratégico. Los elementos de diseño matemático se clasifican en tres redes de Diseño Universal para el Aprendizaje. Estas son: Representación, Acción Estratégica y Compromiso. Cada red consta de dos elementos y se presenta de la siguiente manera, en el sentido de las agujas del reloj.

Red de representación.

La representación incluye un elemento multimodal y la inversión de tiempo en ideas fundamentales, como se indica a continuación.

La designación multimodal pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas:

¿Es accesible el contenido matemático?

¿Es multimodal?

¿Pueden los alumnos elegir cómo resolver los problemas?

¿Las representaciones están conectadas entre sí? ¿Con los conceptos?

La designación «Invertir tiempo en ideas fundamentales» pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas:

¿El diseño de la enseñanza guía a los alumnos para que comprendan las ideas matemáticas fundamentales?

¿El diseño de la enseñanza guía a los alumnos para que comprendan las representaciones matemáticas fundamentales?

¿El diseño de la enseñanza guía a los alumnos para que desarrollen estrategias?

Red de acción estratégica.

La acción estratégica incluye comentarios equitativos y la comprensión de uno mismo como estudiante de matemáticas, tal y como se indica a continuación.

La designación de retroalimentación equitativa pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas: ¿Ayuda la retroalimentación a los estudiantes a crecer como matemáticos? ¿Es la evaluación equitativa para todos los estudiantes?

La designación «Comprender el yo como estudiante de matemáticas» pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas: ¿Qué aprenden sus estudiantes sobre sí mismos como estudiantes de matemáticas? ¿Cómo apoya el desarrollo estratégico?

Red de participación.

El compromiso incluye matemáticas significativas y un entorno de clase que brinde apoyo, de la siguiente manera.

La designación «Matemáticas significativas» pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas: ¿Son las matemáticas significativas y relevantes para los estudiantes? ¿Participan los estudiantes regularmente en la creación de sentido?

La designación «Entorno de clase favorable» pide a los educadores que consideren las siguientes preguntas: ¿Se sienten sus alumnos lo suficientemente seguros como para asumir riesgos matemáticos? ¿Están construyendo relaciones en y a través de las matemáticas?

CAPÍTULO 6 DISEÑAR CON MATEMÁTICAS UDL

EN ESTE CAPÍTULO, APRENDEREMOS...

Aprenderemos sobre las relaciones entre las matemáticas UDL y el pensamiento de diseño.

Exploraremos las entrevistas empáticas

Observaremos a dos profesores mientras rediseñan el trabajo colaborativo en grupo para alumnos con neurodiversidad

EN EL VERANO de 2020, mientras los profesores intentaban prepararse para un otoño incierto debido a la pandemia del coronavirus 2019 (COVID-19), la Dra. Kara Imm y yo fuimos los diseñadores principales de un programa de desarrollo profesional en línea que conectaría una de sus pasiones, el pensamiento de diseño para educadores, y una de las mías, el diseño universal para el aprendizaje en matemáticas (UDL Math). Nuestra intención era ayudar a este grupo de educadores matemáticos y educadores especiales a prepararse para la incertidumbre aprendiendo a diseñar nuevas formas de aprendizaje matemático. Durante el verano, equipos de educadores diseñaron soluciones innovadoras a los problemas a los que se enfrentaban. Por ejemplo, un equipo quería diseñar para las familias durante el aprendizaje a distancia. Decidieron que querían ayudar a las familias a comprender mejor la importancia de las matemáticas en el hogar, a valorar las matemáticas que las familias ya estaban enseñando a sus alumnos. Diseñaron una campaña en las redes sociales en la que compartían cómo las familias enseñaban las matemáticas de su hogar y su cultura a los alumnos.

Al año siguiente, una de nuestras participantes, a la que llamaremos Zelda, impartía clases de matemáticas de secundaria a través de Zoom a clases de educación especial. Como muchos de nosotros hemos experimentado, enseñar matemáticas de forma virtual es especialmente difícil. Zelda había compartido un problema abierto de nivel medio con sus alumnos ([Figura 6.1](#)). Este tipo de problema, diseñado por Robert Kaplinsky, está pensado para que los alumnos experimenten con múltiples soluciones a un problema. Aquí los alumnos trabajan con equivalencias que incluyen variables y coeficientes.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

EXPRESIONES EQUIVALENTES 1

Instrucciones: Usando los números enteros 1-9 en las cajas, crea dos expresiones equivalentes entre sí. Puedes usar cada número una vez como máximo.

Sala para grupos pequeños 4
 -Cada persona hace una nota adhesiva con su nombre y la agrega a esta diapositiva.

$$\boxed{}x + \boxed{}x + \boxed{} + \boxed{}x = \boxed{} + \boxed{}x + \boxed{}$$

Figura 6.1 • Diapositivas de Zoom de Zelda

FUENTE: Reproducido con permiso de openmiddle.com.

Tenía el problema en un Google Jamboard y sus alumnos tardaban mucho en participar, o eso creía ella. En una entrevista unos meses más tarde, nos contó que, mientras esperaba a que los alumnos empezaran a publicar respuestas, empezó a culparse por pedirles que hicieran algo demasiado difícil. Quería cambiar de actividad, cortar por lo sano y ofrecer a los alumnos algo menos desafiante.

En el pasado, según contó Zelda, lo habría hecho. Pero después del trabajo que habíamos realizado con el UDL y las entrevistas empáticas en la clase de verano, se contuvo y dejó de dar por sentado que sabía cómo se sentían los alumnos. En lugar de eso, respiró hondo y les preguntó. Los alumnos le dijeron que estaban pensando y que necesitaban más tiempo, pero que NO querían que ella les quitara el problema. Al reflexionar sobre ese momento, Zelda calificó su línea de pensamiento como «pensamiento deficitario», al asumir que un problema era demasiado difícil para sus alumnos. Dijo:

Puedo captar ese pensamiento y decir: «No, no es que no puedan hacerlo, es como... ¿qué, tenemos que volver a intentarlo? ¿Necesitamos más tiempo? Ya sabes, y también preguntarles: «¿Cómo va esto?»».

A continuación, nos dio una forma de pensar sobre cómo aplicar el UDL a las matemáticas:

El pensamiento de diseño y el UDL son como un proceso activo... no, como un enfoque... sino como esos momentos en la enseñanza, incluso en las clases improvisadas, cuando cambias y te adaptas, eso es... el UDL.

(Lambert et al., 2023) •



VOLVER A INCORPORAR EL DISEÑO EN EL UDL

Entonces, ¿cómo «aplicamos» realmente el UDL en matemáticas? Por desgracia, el UDL se presenta a menudo como un proceso pasivo. Se anima a los profesores a utilizar las directrices del UDL como una lista de verificación para comprobar si sus planes de clase son «UDL» y, si no es así, aplicar algunas de las directrices a sus clases. Este enfoque pasivo de «lista de verificación» es absolutamente contrario al diseño universal, que nos pide que tengamos en cuenta la variabilidad desde el principio, en lugar de adaptarnos a posteriori. Incluso una profesora con experiencia como la Sra. Murphy, a quien conocerán en este capítulo, me dijo que aprender sobre el UDL en el pasado en el desarrollo profesional le resultaba abrumador, ya que se centraba demasiado en las directrices del UDL.

Las investigaciones sobre profesores exitosos de educación inclusiva que incluyen a alumnos con discapacidades en las aulas de educación general han documentado que estos profesores comparten un enfoque creativo para la resolución de problemas (Naraian, 2017). Los profesores exitosos de alumnos neurodiversos deben probar nuevos enfoques y descubrir qué es lo que funciona. Estos profesores buscan constantemente aumentar el acceso de los alumnos marginados, lo que incluye desarrollar la empatía y la comprensión de las perspectivas de los alumnos marginados. Este enfoque puede ser una forma de centrarse no solo en la discapacidad, sino también en la raza y otras posiciones e identidades sociales (Indar, 2018).

El trabajo de este capítulo se ha inspirado en *Design Thinking for Educators* (IDEO, 2012) y, más concretamente, en el trabajo que Kara Imm ha realizado para implementar ese proceso con profesores de matemáticas en Math for America y en nuestra colaboración en UDL Math.2 En este capítulo, no presento el proceso completo de Design Thinking. En su lugar, presento cómo los profesores han utilizado una versión simplificada de este proceso para identificar barreras, abrir sus aulas de matemáticas y proporcionar apoyo estratégico. Estos son los tres gestos que utilizo con los profesores, que se desarrollaron a partir de debates sobre este tipo de trabajo de diseño con los profesores:

2 Estos datos se recopilaron y analizaron con la ayuda de mis colegas Kara Imm, Avery McNiff, Rachel Schuck, Sara Zimmerman y Sunghee Choi (Lambert et al., 2021; Lambert et al. 2023).



También exploraremos algunas herramientas del pensamiento de diseño que son útiles en este proceso.

TOMANDO PRESTADO DEL DESIGN THINKING: HERRAMIENTAS PARA EL DISEÑO

El Design Thinking para educadores es una mentalidad (IDEO, 2012). Los educadores nos enfrentamos a innumerables retos en nuestro trabajo, entre ellos la creación de espacios seguros y atractivos para los alumnos con neurodiversidad. La mentalidad del Design Thinking es (a) humanista, ya que considera la empatía como la base de un buen diseño; (b) optimista, ya que busca los retos que podemos rediseñar; (c) colaborativa; y (d) creativa. Necesitamos esta mentalidad para encontrar nuevas formas de enseñar matemáticas que sirvan a todos nuestros estudiantes. Y este diseño va mucho más allá del diseño de lecciones y unidades. Dado que las barreras para los estudiantes con discapacidades también se encuentran dentro de los sistemas, las rutinas, las interacciones y las estructuras, necesitamos ampliar lo que diseñamos (Imm et al., 2024).

La primera herramienta del Design Thinking es la entrevista empática. El proceso de diseño comienza con la empatía hacia los usuarios, es decir, aquellos que utilizarán lo que diseñamos. La empatía es una herramienta fundamental para mejorar la experiencia de los estudiantes. Al orientar todo el proceso hacia la empatía hacia el usuario, el Design Thinking tiene el poder de cambiar las soluciones de los profesores de aquellas que funcionan para ellos a aquellas que funcionan para sus estudiantes. El Dr. Imm explica en profundidad las entrevistas empáticas en el recuadro lateral de esta página. El debate ofrece ejemplos de preguntas como punto de partida; las preguntas más eficaces tienen en cuenta exactamente lo que se está rediseñando y lo que ya se sabe sobre el estudiante.

La segunda herramienta consiste en buscar los puntos débiles y los puntos conflictivos. Los puntos conflictivos son aquellos en los que, como profesor, sabes que algo no funciona para todos tus alumnos y puedes identificar qué es lo que no funciona (unidad, idea, rutina, etc.). Puede ser una evaluación concreta que no funciona. Puede ser un concepto concreto que te cuesta que todos tus alumnos comprendan cada año, como las restas de varios dígitos en segundo curso. Puede participar en este proceso basándose en ese punto de fricción, que se convierte en lo que rediseña. Otro aspecto que se puede rediseñar son los puntos débiles, o aquellos aspectos de la clase de matemáticas que provocan emociones negativas intensas en los alumnos. Puede averiguar cuáles son los puntos débiles de sus alumnos observándolos. Los alumnos suelen sentirse amenazados cuando se les pide que rindan bajo presión o cuando es probable que se les juzgue por equivocarse. También puede utilizar entrevistas empáticas para descubrir los puntos débiles de los alumnos.

Piénselo

¿Qué puntos débiles y/o puntos críticos puede identificar en su clase de matemáticas?

Perspectiva de la educadora: Kara Imm sobre las entrevistas empáticas

Kara Imm ([Figura 6.2](#)) explicó que las entrevistas empáticas tienen su origen en la práctica del Design Thinking: el primer paso para diseñar para otra persona (por ejemplo, un usuario) es comprender mejor su experiencia vital. Es decir, no dar por sentado que sabemos cómo piensa y siente otra persona sobre un acontecimiento, un encuentro o una experiencia, sino averiguarlo realmente. Por lo tanto, las entrevistas empáticas son una forma en que los diseñadores exploran las preguntas: «¿Quién es el usuario? ¿Cómo experimenta _____? ¿Y cómo se siente al respecto?».



Figura 6.2 • Kara Imm, investigadora y formadora de docentes

FUENTE: Kara Imm

Partimos de la base de que todos los profesores son diseñadores y que, por lo general, nuestros alumnos son nuestros usuarios. Podemos aprender mucho sobre nuestros alumnos simplemente observándolos, interactuando con ellos y estableciendo relaciones con ellos. Pero una entrevista empática logra algo diferente. Nuestro objetivo es descubrir historias, emociones y perspectivas que podrían no surgir de las interacciones cotidianas en el aula. También es ampliar y profundizar nuestra perspectiva sobre un estudiante: puede que los «conozcamos» en este momento como estudiantes individuales, pero también se les conoce a lo largo de muchos años dentro de un grupo de compañeros, la comunidad del aula/escuela, la familia y otras comunidades.

A pesar de su nombre, las buenas entrevistas empáticas no se parecen en nada a otras entrevistas (por ejemplo, las entrevistas de trabajo), sino que son como una conversación natural. El objetivo no es obtener comentarios sobre nuestra enseñanza, sino «trazar un retrato» del niño que nos interesa conocer. No es necesario, ni suele ser el objetivo, entrevistar a todos los alumnos. En cambio, a menudo nos interesa más conocer a los niños para los que la clase, la enseñanza o la experiencia no funcionan, es decir, los alumnos marginados, excluidos o que no se implican en la experiencia de la clase de matemáticas. Cuando descubrimos lo que no funciona (y quizás por qué), empezamos a identificar un problema de práctica, lo que nos permite rediseñar algunos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para este alumno (y otros como él).

Hagamos una lluvia de ideas sobre posibles preguntas para las entrevistas de empatía matemática

Cuéntame sobre las matemáticas que haces en casa con tu familia.	He oído a un estudiante de otra escuela decirme que algunos niños reciben ayuda adicional en matemáticas. ¿Es eso cierto en tu escuela? ¿Qué tipo de ayuda?	Si tuvieras un amigo que tuviera problemas con las matemáticas, ¿qué consejo le darías?	Si hay diferentes tipos de estudiantes de matemáticas, ¿qué tipo de estudiante de matemáticas eres tú? ¿Por qué?
¿Quién destaca en tu clase de matemáticas? ¿Por qué?	¿Hablas mucho, poco o nada en clase de matemáticas? ¿Por qué?	Si tuvieras una varita mágica, ¿qué cambiarías de la clase de matemáticas? ³	¿Cuál es tu recuerdo favorito de las matemáticas, dentro o fuera de la escuela? ¿Por qué?
Cuéntame sobre tu clase de matemáticas.	Cuéntame alguna ocasión en la que no te sintieras exitoso en matemáticas.	¿Qué idiomas hablas en la clase de matemáticas? ¿Y en casa cuando hablas de matemáticas?	Cuéntame alguna ocasión en la que te sintieras exitoso en matemáticas.

³Aprendí esta pregunta de los educadores de High Tech High.

APLICACIÓN DEL UDL A LAS MATEMÁTICAS: DOS PROFESORAS ABORDAN EL TRABAJO COLABORATIVO EN GRUPO EN LA PRIMARIA

La Sra. Murphy y la Sra. Díaz son profesoras con experiencia en los primeros cursos de primaria que llevan muchos años trabajando en los grados K-3. Ambas son profesoras líderes en matemáticas que ofrecen desarrollo profesional a otros profesores de diversas maneras, además de ejercer como líderes en sus respectivas escuelas. Gracias a su participación durante muchos años en el desarrollo profesional de matemáticas a nivel del condado, han entablado una estrecha amistad. Ambas son profesoras de educación general con titulación en educación primaria (Figura 6.3).

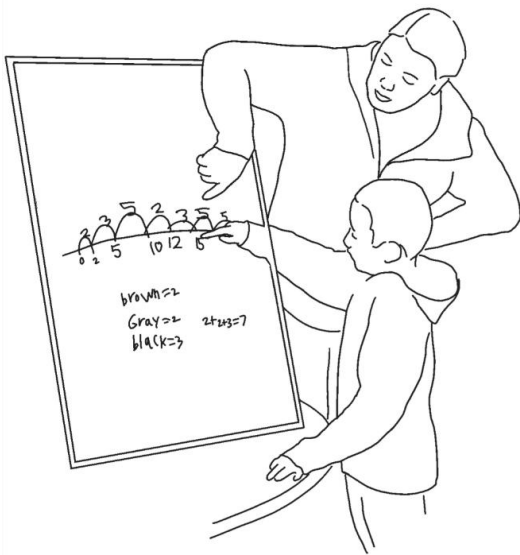


Figura 6.3 • La Sra. Díaz dirigiendo una sesión de intercambio de trabajos de los alumnos

Ambas maestras estaban muy interesadas en aprender sobre las matemáticas UDL porque sus escuelas estaban avanzando hacia la inclusión de alumnos con servicios de educación especial en la educación general. Ambas maestras tenían más alumnos de educación especial incluidos en sus aulas de educación general ese año. La Sra. Díaz había tenido anteriormente entre dos y tres alumnos con Programas de Educación Individualizados (IEP) en su clase cada año. Pero este año, se le había pedido que incluyera a 10 alumnos con IEP en su clase de 22 alumnos de segundo grado. Ambos profesores apoyaban la inclusión sin reservas. Sin embargo, parecía que esto les estaba planteando nuevos retos.

Identificar las barreras Parte 1: ¿Por qué los profesores consideran que la clase de matemáticas es limitada?

En nuestra sesión, empecé juntando las manos, para crear un espacio estrecho entre ellas, y dije: «La clase de matemáticas es demasiado limitada». Varios profesores asintieron inmediatamente. Pedí al grupo que compartiera por qué consideraban que la clase de matemáticas era demasiado limitada. Respondieron lo siguiente:

A los alumnos se les dice que resuelvan los problemas de una sola manera.

A los alumnos solo se les permiten ciertas formas de explicar su razonamiento.

Se controla estrictamente a los alumnos y se les pide que permanezcan sentados durante largos periodos de tiempo.

Escuchar es la principal modalidad de aprendizaje.

La clase de matemáticas puede ser un espacio en el que solo hay respuestas correctas o incorrectas, con poco margen para otras opciones.

A continuación, pedí a los profesores que empezaran a pensar en los aspectos de sus clases de matemáticas que les parecían limitados o que podrían parecerlo a los alumnos.



En su mesa, la Sra. Díaz y la Sra. Murphy se lanzaron inmediatamente a debatir sobre los retos que supone la resolución colaborativa de problemas para sus alumnos más jóvenes. La Sra. Díaz y la Sra. Murphy estaban convencidas de que la colaboración en la resolución de problemas era la práctica más importante en su clase de matemáticas, incluso para los niños de 1.º y 2.º curso (sus clases actuales). En una reflexión, escribieron:

Queremos que todos nuestros alumnos sean capaces de interactuar con las matemáticas de forma dinámica. Analizar diferentes enfoques para resolver problemas y comunicar sus ideas. Queremos que nuestra clase ayude a estos alumnos a interactuar con otros en grupos cooperativos y a comunicar sus ideas a los demás. No queremos que la hora de matemáticas sea solitaria.

Este año, cada uno de ellos tenía alumnos que parecían no querer trabajar en grupo o que necesitaban más apoyo para hacerlo. La Sra. Murphy tenía un alumno autista, al que llamaremos Anthony, que estaba muy por encima del nivel de su curso en matemáticas. Parecía preferir trabajar solo en lugar de con otros alumnos. A la Sra. Murphy le parecía que Anthony no disfrutaba trabajando con alumnos que no tenían su nivel de experiencia.

La Sra. Díaz también tenía varios alumnos que parecían carecer de inclinación o de habilidades para participar en el trabajo colaborativo de matemáticas. Por ejemplo, tenía un alumno disléxico que se enfadaba cuando se le presentaba cualquier texto, incluso en matemáticas. Sin embargo, lo que más le preocupaba era Tomás, un alumno de segundo grado con autismo. Recientemente había aprendido a contar de forma coherente con correspondencia uno a uno y contaba de uno en uno para todas las sumas y restas. Se quedaba al margen durante el trabajo en pareja, mirando el problema pero sin hablar. No estaba claro si escuchaba a los demás miembros de su grupo. Otras veces, intervenía e interrumpía a los alumnos para compartir inmediatamente.

La Sra. Díaz y la Sra. Murphy comentaron que su proceso colaborativo era demasiado limitado. ¿Qué era lo que no funcionaba para todos sus alumnos? ¿Qué podían modificar para ayudar a todos los alumnos a participar en el trabajo colaborativo? Hablaron de que, para ambas, el alumno al que realmente querían involucrar en el trabajo colaborativo era autista, pero que los dos alumnos eran muy diferentes. Uno estaba catalogado como «superdotado» en matemáticas, mientras que el otro necesitaba apoyo en matemáticas básicas. Uno dominaba las conversaciones en grupos pequeños y el otro rara vez hablaba. ¡Esto es un importante recordatorio de la variabilidad dentro de la discapacidad!

Los profesores escribieron en su reflexión:

La necesidad de trabajar en grupos cooperativos requiere que nuestros alumnos utilicen habilidades sociales que les plantean retos para poder hacer matemáticas. Queremos cambiar la estructura de los grupos cooperativos para que estos alumnos puedan participar de forma positiva.

Me doy cuenta y aprecio que estos profesores no ven a los alumnos como el problema que hay que solucionar, sino que ven el problema como «la estructura de los grupos cooperativos». A menudo, se considera que los alumnos con discapacidades son el problema. La atención se centraría en solucionar el problema de Tomás y Anthony. Sin embargo, estos profesores comprendieron que el cambio más importante tiene que venir de dentro de sus estructuras y rutinas.

Identificar las barreras,
alumnos la clase de

parte 2: ¿Cómo ven los
matemáticas?



Pregunté a la Sra. Díaz y a la Sra. Murphy si los alumnos verían este problema de la práctica de la misma manera que ellas. Ya habíamos hablado de las entrevistas empáticas, y las profesoras se entusiasmaron con la idea de diseñar una entrevista empática que les ayudara a comprender mejor cómo se sentían sus alumnos respecto a los grupos colaborativos. La Sra. Murphy y la Sra. Díaz decidieron entrevistar a dos alumnos cada una: uno de sus alumnos autistas al que no parecía gustarle trabajar en grupo (Anthony y Tomás) y un alumno que no era autista y que trabajaba con frecuencia con esos alumnos. Lo que me gusta de su diseño es que recopiló deliberadamente datos de alumnos con diferentes experiencias. Siempre que diseñamos una solución que funciona con la variabilidad de los alumnos, estamos diseñando de forma más eficaz. Estas son las preguntas de la entrevista empática que diseñaron para sus jóvenes alumnos:

Imagina que es un día en el que trabajamos en grupos para la clase de matemáticas.
¿Cómo te sientes? ¿Por qué?

¿Con quién te gusta trabajar en grupo? ¿Por qué? ¿Qué los convierte en buenos compañeros?

¿Hay ocasiones en las que te resulta difícil trabajar con otro estudiante? ¿Por qué?
¿Qué haces entonces?

¿Qué es lo que más te gusta de la clase de matemáticas?

Elaboración de un plan para proporcionar apoyo estratégico

Después de realizar estas entrevistas, la Sra. Díaz y la Sra. Murphy se reunieron para discutir lo que habían aprendido. En general, los alumnos expresaron que disfrutaban del trabajo en grupo en la clase de matemáticas. Tres de los cuatro alumnos entrevistados dijeron que les gustaba trabajar en pareja en la clase de matemáticas, que era más «divertido» y que «trabajar juntos es más divertido que hacerlo solos». La única excepción fue Tomás, de la clase de la Sra. Díaz. Él dijo que le gustaban los juegos y trabajar en las pizarras blancas, pero no el trabajo en grupo. La mayoría de los alumnos dijeron que aprendían más cuando trabajaban con un compañero. Los dos alumnos con autismo señalaron que era especialmente importante ser amigos de los compañeros con los que trabajaban en matemáticas. Los dos alumnos de la clase de la Sra. Díaz mencionaron que trabajar en las pizarras blancas era lo que más les gustaba de las matemáticas.

A la Sra. Murphy le interesaba especialmente la perspectiva de Anthony, ya que creía que no le gustaba el trabajo en grupo. Durante el trabajo en grupo, discutía con otros alumnos sobre los problemas matemáticos. Sin embargo, en su entrevista, dijo: «Me gusta trabajar con compañeros, me ayudan con las estrategias» y «Me gusta resolver problemas. Es un buen ejercicio para mi cerebro». También dijo que su momento favorito de matemáticas era trabajar en problemas con compañeros. Esto sorprendió a la Sra. Murphy, que había asumido lo contrario.

Tomás fue el único niño entrevistado que se mostró ambivalente con respecto al trabajo en grupo. Sus dudas estaban relacionadas con el hecho de tener que trabajar con otro niño al que no consideraba un «amigo». Contó una historia sobre una interacción negativa entre él y otro niño durante el recreo y sobre cómo no quería trabajar con ese niño en matemáticas.

Al otro alumno de la clase de la Sra. Díaz le gustaba mucho trabajar en grupo y, cuando se le preguntó si era «difícil» trabajar con otro alumno, respondió que «a veces la gente intenta hacerlo por su cuenta aunque seamos compañeros».

En este caso, observaron que casi todos los alumnos afirmaban disfrutar del tiempo con sus compañeros y aprender de él, incluido el mayor entusiasmo de un alumno con autismo que, según la Sra. Murphy, no le gustaba trabajar en grupo. Al otro alumno con autismo, que estaba en la clase de la Sra. Díaz, solo le disgustaba el trabajo en grupo cuando le tocaba trabajar con un alumno que no le caía bien. Parecía que lo que más les molestaba a los alumnos era trabajar con alguien que no les gustaba o con alguien que no colaboraba en la resolución de problemas. Mejorar el trabajo en grupo parecía estar relacionado con ayudar a los alumnos a trabajar mejor juntos.

Entonces, ¿cómo podemos ayudar a todos los alumnos a comunicarse, compartir y participar más en el trabajo en pareja en matemáticas? ¿Y qué hacemos con la asignación de compañeros?

Tanto la Sra. Murphy como la Sra. Díaz llevaban mucho tiempo utilizando planes de estudios de matemáticas de alta calidad, como Contexts for Learning Mathematics, de Fosnot. Trabajando juntas, ya llevaban un año experimentando con prácticas de resolución de problemas en grupo después de leer el libro Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K–12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning (Liljedahl, 2020). El libro ofrece un conjunto de prácticas docentes para aulas en las que los alumnos piensan y resuelven problemas de forma activa (para más información, consulte la Guía de prácticas docentes en línea). Ambas profesoras ya habían adoptado las prácticas de agrupación visible no aleatoria (agrupar a los alumnos de forma aleatoria) y el uso de superficies verticales no permanentes (pizarras que colocaban sobre las mesas de los alumnos). Emplearon estas prácticas para profundizar en la participación de los alumnos en la investigación matemática, un ejemplo de investigación guiada.



Guía de prácticas docentes en líneaqrs.ly/l7f7rwg

Entonces, ¿cuáles eran las barreras para sus alumnos? Parecía que ya habían abierto el aula. Habían pasado a ofrecer más opciones y flexibilidad en la resolución de problemas por parte de los alumnos, lo que parecía aumentar la participación de algunos, pero no de todos. Así que decidieron centrarse en el tercer elemento de las matemáticas UDL: proporcionar apoyos estratégicos.

Decidieron añadir algunos apoyos más que mejoraran el trabajo en grupo y la comunicación de todos los alumnos y que, en concreto, ayudaran a alumnos como Tomás, que necesitaban apoyo para participar:

Crear oportunidades para reflexionar sobre la colaboración.

Proporcionar herramientas multimodales/manipulativas para apoyar la colaboración.

Formar grupos estratégicos

Crear oportunidades para reflexionar sobre la colaboración

El primer elemento que añadieron fue hacer más explícitas las normas del trabajo en grupo y pedir a los alumnos que reflexionaran cada día sobre su trabajo en pareja, lo cual es un ejemplo de coaching estratégico para todo el grupo. Crearon una estructura para el debate al final del problema, con el fin de que los alumnos reflexionaran sobre su resolución de problemas y su trabajo en pareja. La Sra. Díaz preguntó a sus alumnos:

¿Qué aprendiste como estudiante de matemáticas?

- ¿Qué aprendiste como solucionador de problemas?
- ¿Qué aprendiste sobre ti mismo?

Proporcionar herramientas multimodales/manipulativas para apoyar la colaboración

Buscaron herramientas específicas que ayudaran a todos los alumnos a participar, como un marco de diez o una regla. Entregaban esa herramienta al alumno que no participaba con tanta facilidad, proporcionándole una herramienta importante que ayudaría al grupo. En otros casos, añadieron herramientas multimodales adicionales para que todos los niños pudieran participar de forma no verbal. Esto supuso un apoyo importante para Tomás, que trabajaba bien con herramientas como la tabla de cientos.

Formar grupos estratégicos

Este último elemento fue algo que probó la Sra. Díaz, pero no la Sra. Murphy. La Sra. Díaz decidió apoyar a Tomás asegurándose de que siempre estuviera en un grupo de tres. Supuso que este enfoque ayudaría al grupo a empezar con el problema y no pondría a otro estudiante en la posición de trabajar solo mientras Tomás tenía suficiente tiempo para pensar.

VER EL PLAN EN ACCIÓN: VISITA A LA CLASE DE SEGUNDO GRADO DE LA SRA. DÍAZ



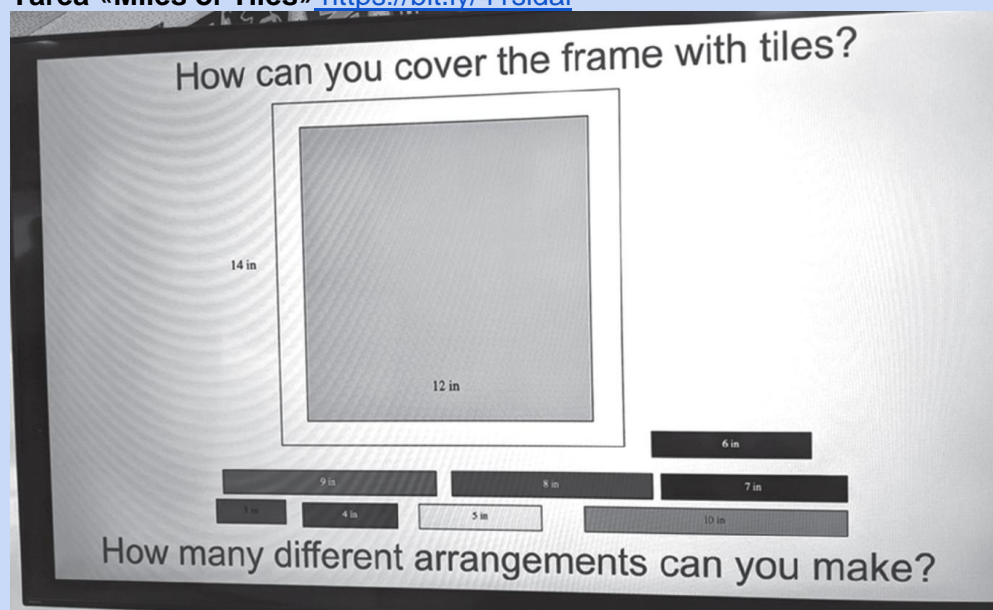
Un día visité la clase de segundo grado de la Sra. Díaz mientras trabajaba en este problema de práctica. Su clase tenía 19 alumnos, 7 de los cuales tenían IEP. Otros tres alumnos con IEP se integraron en la clase durante parte del día. La mayoría de los alumnos eran latinos y un gran porcentaje eran alumnos multilingües. Durante la clase de matemáticas, un profesor de educación especial también trabajaba con la Sra. Díaz, así como dos auxiliares docentes.

Al comenzar la clase, la Sra. Díaz reunió a los alumnos en la alfombra. Me di cuenta de que todos los alumnos que estaban en la alfombra se encontraban en diferentes estados de inquietud, desde algunos que permanecían perfectamente quietos hasta otros que se movían constantemente mientras seguían sentados con las piernas cruzadas.

La Sra. Díaz comenzó planteando el problema que los alumnos iban a resolver ese día. Su tarea consistía en averiguar cómo se podía rellenar el exterior de la forma con las longitudes proporcionadas, la tarea «Miles of Tiles» (Millas de baldosas) diseñada por Inside Mathematics. La Sra. Díaz adaptó el problema recortando los bloques lineales en tiras de papel cartón para cada grupo pequeño. Esta tarea era multimodal, tenía múltiples soluciones e incluía un aspecto visual/concreto que la hacía especialmente accesible para estos alumnos. Al presentar la tarea, leyó todo el texto y dio un ejemplo utilizando las tiras de papel.



Tarea «Miles of Tiles» <https://bit.ly/41sldal>



Pruébalo

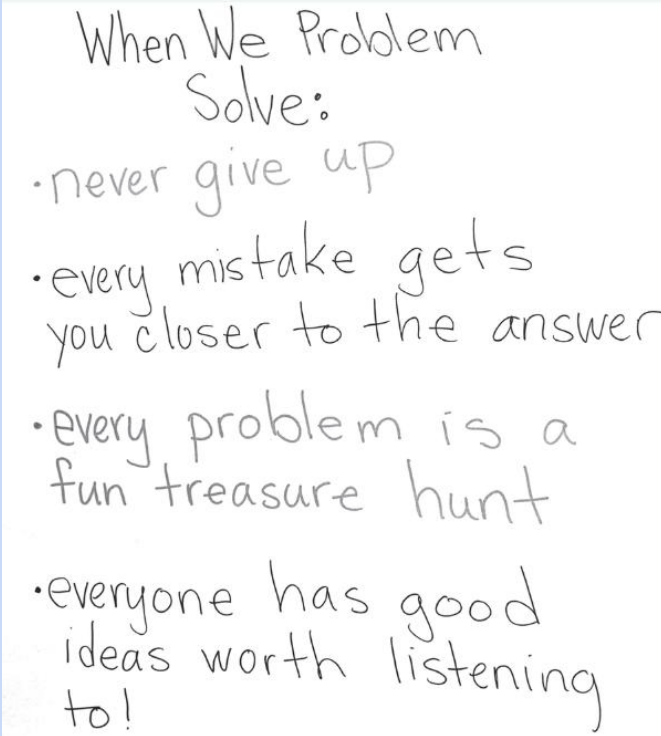
Intenta resolver el problema.

¿Cómo puedes cubrir el marco con baldosas? ¿Cuántas disposiciones diferentes puedes hacer? (Los bloques tienen longitudes de 3 pulgadas, 4 pulgadas, 5 pulgadas, 6 pulgadas, 7 pulgadas, 8 pulgadas, 9 pulgadas y 10 pulgadas).

¿Qué observas en este problema? ¿Qué conceptos matemáticos explorarán los alumnos?

¿Qué estrategias podrían utilizar?

Antes de enviar a los alumnos a trabajar, la Sra. Díaz les recordó sus acuerdos colectivos para la resolución de problemas. Este póster formaba parte de un debate en el que los alumnos reflexionaron sobre lo que hace que un compañero sea bueno:



A continuación, la Sra. Díaz se paseó con una cesta que contenía bloques con patrones, cada uno de ellos con un número de grupo escrito en él. Entregó una forma a cada alumno. En nuestra reunión informativa, supe que se había asegurado deliberadamente de que Tomás estuviera en un grupo de tres asignando al último alumno al grupo en el que se había colocado a Tomás.

La Sra. Díaz pidió a los alumnos que se sentaran en las mesas. Cada mesa estaba equipada con un caballete y un rotulador para pizarra blanca. Se había sujetado a la mesa con una funda de plástico un papel con el problema para que los alumnos pudieran dibujar directamente sobre él con los rotuladores. En las mesas también había tiras de papel que los alumnos podían utilizar para ver qué encajaba.

Empecé en la mesa de Tomás con tres alumnos. Además de él, su grupo incluía a una niña muy tímida llamada Shaunna y a otra un poco menos tímida llamada Briana, que fue la que escribió la mayor parte del trabajo. Siguiendo otra práctica de *The Thinking Classroom* (Liljedahl, 2020), la Sra. Díaz había dado a cada grupo un solo rotulador para la pizarra blanca, de modo que tuvieran que comunicarse entre ellos. Mientras los observaba, antes de que ningún profesor se acercara, empezaron hablando de Patricio, de Bob Esponja. Briana hizo un dibujo rápido de Patricio y lo borró rápidamente cuando el profesor pasó por delante. Los tres niños se sonrieron entre sí y luego empezaron con el problema. Me pregunté si tal vez estos niños necesitaban establecer un poco de solidaridad antes de asumir juntos riesgos

matemáticos.



Figura 6.4 • El grupo de Tomás en su pizarra

La figura 6.4 muestra a su grupo trabajando. Utilizaban tanto las tiras de papel, que colocaban en el cuadrado, como reescribían las medidas con el rotulador de pizarra. Observé en todos los grupos que las múltiples herramientas permitían que varios alumnos participaran activamente al mismo tiempo. En ese pequeño momento, los tres alumnos sostenían piezas o escribían, lo que demostraba que el problema había involucrado a todos los alumnos. Tomás, a la izquierda, participó en silencio al principio sosteniendo y luego colocando las tiras de papel.

Al principio, solo Briana y Shauna hablaron del problema. Tomás se sintió atraído por las tiras de papel, las juntó y las tocó por los lados. Las chicas decidieron que la parte superior sería 14, los lados 13 y la parte inferior 12. En un momento dado, tuvieron que averiguar cómo hacer que un lado sumara 13. Shauna contó con los dedos, empezando por el 7 y sumando luego el 6. A continuación, me susurró «13» y empezó a saltar de alegría, muy emocionada. Briana, con el bolígrafo en la mano, escribió en la pizarra una estrategia para dividir el número, separando el 6 en 3 y 3 y sumando un 3 al 7, antes de añadir el 3 restante.

Tomás observaba a los alumnos mientras resolvían este problema matemático, quizá sin saber muy bien cómo participar o simplemente pensando en su propia estrategia. El profesor de educación especial, que había estado observando al grupo, le preguntó a Tomás en voz baja: «¿Quieres una recta numérica o una tabla de centenas?». Tomás sonrió y corrió hacia donde había una tabla de centenas en blanco en una carpeta de borrado en seco, empezó a contar mientras tocaba los espacios con el dedo y gritó: «6 más 7». A continuación, explicó a las niñas cómo lo había resuelto, reproduciendo su estrategia en la herramienta (contando de uno en uno y luego contando todo). Me pareció que este grupo estaba trabajando muy bien en equipo, tanto en lo que se refiere al progreso en matemáticas como a la integración de todos los miembros del grupo en su comunidad. Tanto la herramienta multimodal como el grupo de tres parecían funcionar bien para Tomás.

La Sra. Díaz dirigió una breve puesta en común, en la que un grupo discutió cómo lo resolvió como dos 14 y dos 12. Otro grupo intentó hacer cuatro 12, con una esquina, pero tuvo problemas para que las tiras de papel funcionaran con su plan. La puesta en común fue

breve y se utilizaron los elementos visuales que crearon los alumnos. La Sra. Díaz utilizó la palabra «equivalencia» al establecer breves conexiones entre los trabajos de los alumnos. Hizo una pregunta utilizando esta misma palabra para terminar la puesta en común, prestando atención al desarrollo del vocabulario matemático de sus alumnos. En toda la clase, vi un excelente pensamiento matemático y una fuerte colaboración. Estos alumnos de segundo grado trabajaron en equipo en un único problema matemático complejo durante más de 30 minutos, una hazaña impresionante para alumnos de segundo grado. Todos los grupos llegaron a una solución. ●

REFLEXIONES SOBRE EL DISEÑO

Un mes después, me reuní con la Sra. Murphy y la Sra. Díaz para reflexionar sobre lo que había funcionado en sus respectivas aulas. Ambas coincidieron en que, en general, el rediseño del trabajo en grupo había sido un éxito. Consideraban que sus alumnos autistas se sentían más incluidos y tenían una opinión más positiva sobre el trabajo colaborativo en la clase de matemáticas.

La Sra. Murphy reflexionó sobre la importancia de las entrevistas empáticas para su trabajo. Para ella, la parte más importante de este proceso fue descubrir lo que realmente pensaba Anthony, a quien creía que no le gustaba el trabajo en grupo. A través de la entrevista empática, la Sra. Murphy descubrió que no solo le gustaba el trabajo en grupo, sino que también apreciaba cómo le ayudaba a crecer matemáticamente. Esta idea cambió la forma en que veía a su alumno. Ese cambio marcó la diferencia en cómo se relacionaba con él y en cómo interpretaba sus acciones durante el trabajo en grupo.

La Sra. Murphy probó las dos primeras estrategias que acordaron, pero creyó que el mayor impacto se produjo al pasar a la agrupación visiblemente aleatoria de The Thinking Classroom (Liljedahl, 2020). Según ella, una vez que dejó claro a sus alumnos que los grupos eran completamente aleatorios y que al día siguiente tendrían un nuevo compañero, los alumnos dejaron de quejarse de sus compañeros. Y, según la Sra. Murphy, esto hizo que ambos compañeros de cada grupo se esforzaran un poco más por entenderse.

Su trabajo conjunto para implementar el UDL en la clase de matemáticas fue creativo y colaborativo. Hacer que la clase de matemáticas sea más accesible no es una tarea que se termine nunca. No existe una clase de UDL perfecta que sea accesible para cualquier niño que entre en ella. Pero podemos tener una mentalidad de resolución creativa de problemas para ayudar a los niños, ¡como sin duda hicieron la Sra. Murphy y la Sra. Díaz!

Mientras observaba a la Sra. Murphy y a la Sra. Díaz discutir su trabajo y lo que podrían intentar el año que viene (ambas quieren hacer entrevistas empáticas con todos los alumnos al comienzo del año), me llamó la atención lo afortunadas que eran de tenerse la una a la otra. El trabajo de rediseñar, de hacer accesible las matemáticas, de abrir nuestras aulas, es difícil y resulta más fácil en comunidad.

PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

1. ¿Qué opinas de las entrevistas de empatía? ¿Cómo podrías utilizarlas en tu trabajo?
2. Al leer el capítulo, ¿qué tipo de rediseño imaginaste? ¿Qué pensaste sobre el rediseño

(plan de estudios, unidades, lecciones, espacios, interacciones, rutinas)? ¿Con quién podrías diseñar?

3. ¿Ha tenido alumnos que tuvieron dificultades para resolver problemas en grupo? ¿Qué ha intentado hacer al respecto?

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 6.1 • Diapositivas de Zoom de Zelda

La tarea se ilustra con una pila vertical de cuadros etiquetados del 1 al 9. Los cuadros están sombreados en tres colores diferentes y repiten el patrón de colores oscuro, claro y medio. La tarea se titula «Expresiones equivalentes 1». Las instrucciones para esta tarea se presentan de la siguiente manera. Divida la sala en 4. Cada persona debe escribir su nombre en una nota adhesiva y añadirla a esta diapositiva.

Las instrucciones se presentan de la siguiente manera. Utilizando los números enteros del 1 al 9 de las cajas de abajo, crea dos expresiones que sean equivalentes entre sí. Puedes utilizar cada número entero como máximo una vez.

La siguiente expresión está escrita debajo de las instrucciones: $X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco} = X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco} + X \text{ en blanco}$.

Figura 6.3 • La Sra. Díaz dirigiendo una puesta en común del trabajo de los alumnos

La recta numérica comienza en cero. Un salto de más 2 llega a 2. Un salto de 3 llega a 5. Un salto de 5 llega a 10. Un salto de 2 llega a 12. Un salto de 3 llega a 15. Un salto de 5 llega a 20.

Tarea «Millas de baldosas»

La captura de pantalla muestra un marco de fotos cuadrado. El interior del marco es un cuadrado de 12 por 12 pulgadas. El exterior del marco es un cuadrado de 14 por 14 pulgadas.

¿Cómo puedes cubrir el marco con los azulejos? ¿Cuántas disposiciones diferentes puedes hacer?

Cada baldosa mide 1 pulgada de ancho. Las baldosas tienen las siguientes longitudes.

3 pulgadas.

4 pulgadas.

5 pulgadas.

6 pulgadas

7 pulgadas.

8 pulgadas.

9 pulgadas.

10 pulgadas.

Carteles de los alumnos:

El póster escrito a mano se titula «Cuando resolvemos problemas».

El póster presenta cuatro reglas para resolver problemas.

Nunca te rindas.

Cada error te acerca más a la respuesta.

Cada problema es una divertida búsqueda del tesoro.

Todo el mundo tiene buenas ideas que vale la pena escuchar.

CAPÍTULO 7 INVERTIR EN IDEAS FUNDAMENTALES

EN ESTE CAPÍTULO, HAREMOS...

Visitar una clase de educación especial de K-1 que se centra en ideas fundamentales sobre el valor posicional y el sentido numérico a través del conteo coral y el conteo de colecciones.

Exploraremos el concepto de ideas fundamentales como algo en lo que vale la pena invertir tiempo.

Explorar las ideas fundamentales como una forma de adaptar la enseñanza a los alumnos con discapacidad intelectual.

El aula de K-1 de **HANNAH BENAVIDEZ** (Figura 7.1) es un espacio autónomo para unos 10 alumnos latinos con importantes necesidades de apoyo, la mayoría de los cuales tienen autismo. Su pequeño grupo es diverso en cuanto a su forma de pensar, sentir y relacionarse con el mundo. Las necesidades de apoyo de sus alumnos son variadas, ya que algunos necesitan dispositivos de comunicación aumentativa y alternativa (CAA) para comunicarse y otros les encanta hablar verbalmente. Los niños también tienen distintos niveles de habilidad matemática. Por ejemplo, un alumno podía sumar y restar números de varios dígitos, mientras que otros en la clase estaban aprendiendo a contar hasta cinco. Algunos de sus alumnos, pero no todos, tienen discapacidades intelectuales. Hannah es una maestra excepcional que combina un trato amable con altas expectativas, y siempre espera que sus alumnos tengan ideas importantes que deben ser escuchadas.



Figura 7.1 • Hannah, profesora de educación especial de K-1, trabajando con un alumno

Una mañana observé la clase con un grupo de educadores especiales de su distrito. Los alumnos de Hannah estaban haciendo «contar en coro» y «contar colecciones» (Franke et al., 2018; para más información, véanse las guías de prácticas docentes sobre «contar colecciones» y «contar en coro» en línea).



Guía de prácticas docentes en líneaqrs.ly/l7f7rwq

La clase comenzó con los alumnos de Hannah sentados en sus pupitres formando un semicírculo, frente a una hoja de papel grande. Hannah se situó al frente de la clase con su propia hoja de papel y comenzó explicando que iban a contar desde 100 de uno en uno (Figura 7.2).

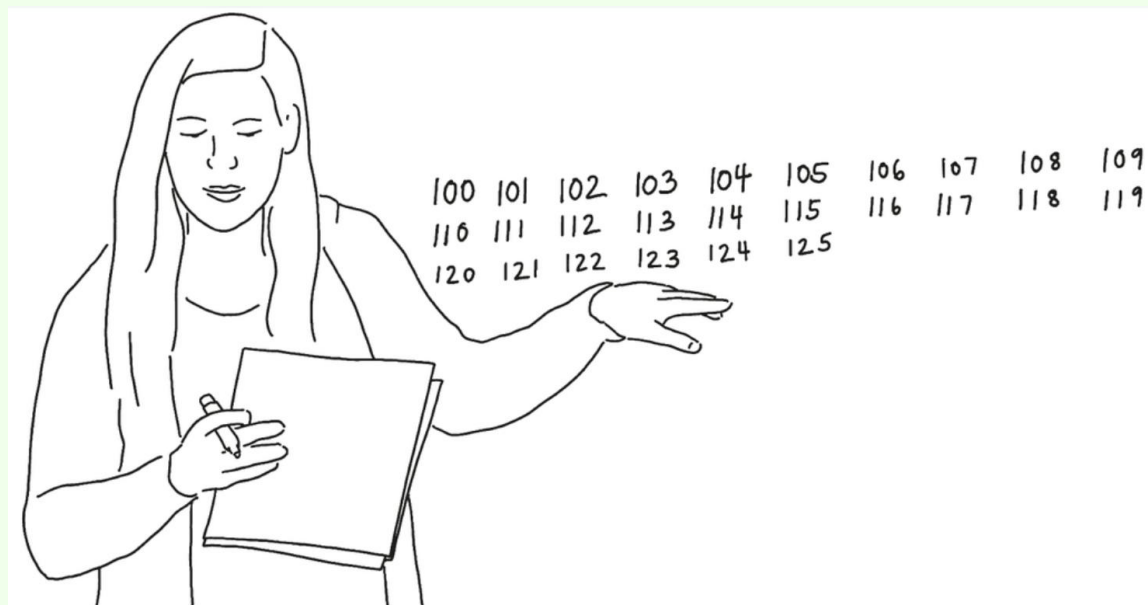


Figura 7.2 • Hannah dirigiendo el conteo coral

Mientras Hannah escribía en la cartulina, decía en voz alta los siguientes números: «100, 101, 102, 103». La mitad de los alumnos la imitaron, mientras que otros se limitaron a mirar y algunos apartaron la vista. Ella y sus alumnos contaron hasta 125 y, a continuación, Hannah preguntó a los alumnos si veían algún patrón. Un alumno se dio cuenta de que los números al principio (el lugar de las centenas) permanecían iguales, mientras que el último número cambiaba. Hannah utilizó colores para mostrar los patrones que los alumnos describían.

Hannah preguntó si los alumnos podían encontrar el 105. Un niño se acercó con un asistente, que le guió la mano mientras marcaba el número correcto. Me pregunté si el niño sabía el número o si el asistente le había guiado la mano. A mi lado, también observando, había una profesora que había trabajado con este niño el año anterior en el jardín de infancia. Ella se quedó sin aliento y me susurró que era la primera vez que veía a este niño levantarse en una reunión de clase y compartir algo, en cualquier materia. Esto me recordó que, al igual que para todos los niños, hay diferentes tipos de objetivos y diferentes tipos de crecimiento para los niños, no solo matemáticos, sino también sociales. Mientras yo me preocupaba porque este niño no reconocía el número, la maestra a mi lado se emocionó al ver al niño tan seguro de sí mismo frente a su clase.

Un alumno, George, preguntó: «¿Esto sigue funcionando en los 900?». Hannah añadió ese número al final de la hoja de papel, contando «900, 901, 902». En esta actividad de conteo coral, los alumnos investigaban cómo funcionaba el sistema numérico, ampliando lo que sabían sobre el conteo de uno en uno a números más grandes. Hannah se mostraba tranquila y comprensiva, al tiempo que animaba con delicadeza a cada uno de sus alumnos a arriesgarse matemáticamente.

A continuación, Hannah pasó a la actividad de contar colecciones, señalando la mesa cubierta de conjuntos de materiales para contar, cada uno en su propia bolsa. Les recordó las herramientas que podían utilizar para contar sus colecciones (marcos de 10, vasos, platos, gomas elásticas). Algunos alumnos fueron a buscar sus propias colecciones y eligieron sus propias herramientas, mientras que otros recibieron la ayuda de Hannah o de los auxiliares docentes. A continuación, los alumnos se pusieron manos a la obra con el recuento de colecciones. Algunos trabajaban en parejas, otros solos y otros con los auxiliares docentes. Mientras los alumnos trabajaban, Hannah observaba y les ayudaba con el recuento, incluyendo la correspondencia uno a uno, la cardinalidad y el conocimiento de la secuencia numérica.

Una niña a la que llamaremos Noemí estaba contando un conjunto de fichas redondas de plástico, algunas azules y otras moradas. Hannah le había pedido específicamente que contara este conjunto y que averiguara cuántas eran moradas y cuántas azules, así como el total. Noemí miró a Hannah, asintió con la cabeza y empezó a contar. Cuando Noemí se equivocó al contar los números del 10 al 19, Hannah la detuvo, le recordó la secuencia de números de esa decena y escuchó mientras Noemí volvía a contar. Cuando Noemí terminó de contar, anotó su recuento utilizando una herramienta de registro digital. Normalmente, en Counting Collections se aconseja a los alumnos que utilicen papel para anotar sus recuentos, pero Hannah había descubierto que sus alumnos hablaban y producían más registros de sus recuentos utilizando una tableta. Noemí tomó una foto de sus objetos y luego la anotó en color.

Un niño en la esquina, Juan, estaba contando con un asistente, colocando repetidamente pelotas blandas en un recipiente con una tapa blanda, hecho para guardar bocadillos. Por

cada objeto que introducía, tocaba el botón de su dispositivo de comunicación aumentativa y alternativa (CAA) para cada número, que luego le decía en voz alta el recuento. Parecía feliz, incluso encantado, con su recuento. Cuando terminó el recuento, lo volvió a hacer inmediatamente, repitiendo el recuento varias veces. Hannah dijo que a él le encantaba ese recipiente y meter cosas en él, por lo que lo estaba integrando en «Contar colecciones». La asistente proporcionaba comentarios a Juan, que estaba empezando a dominar la secuencia numérica de los números del 10 al 19. Cuando pulsaba el número equivocado, ella simplemente pulsaba el correcto y él la imitaba. La asistente proporcionaba este apoyo de forma tan silenciosa y suave que nunca la oí hablar con Juan.

A George se le asignó un recuento mucho mayor que al resto de los alumnos, que en su mayoría contaban conjuntos de menos de 30. Hannah le dio a George una colección que incluía tanto una pila de seis cajas de clips marcadas con el número 100 en el lateral como un montón de clips sueltos. Hannah le dijo que necesitaba 735 clips y luego le preguntó si tenía que pedir más y, en caso afirmativo, cuántos. George se puso manos a la obra, contando de 100 en 100 y anotando los resultados en un papel.

Hannah se movió por el aula, haciendo preguntas y añadiendo retos a los recuentos de los alumnos. Algunos alumnos grabaron audio en sus tabletas, así como imágenes. Cuando los alumnos terminaban un recuento, podían elegir su siguiente colección para contar entre una gran variedad de opciones que Hannah había reunido a lo largo del tiempo.

Hannah terminó la sesión de clase con una puesta en común, que era la parte más difícil de la clase de matemáticas para este grupo de niños pequeños. Hannah ayudó a un alumno a compartir su recuento físico en medio de la alfombra, con los alumnos reunidos a su alrededor. El niño mostró cómo agrupaba los objetos en decenas, mientras Hannah narraba la estrategia. Durante la puesta en común, vi a Noemi alejarse sigilosamente, dar la espalda al grupo y empezar a contar algo en silencio, señalando con el dedo y moviendo los labios como si estuviera contando algún conjunto. Me pregunté qué estaría imaginando o contando. Su participación, como niña de 6 años con autismo, era diferente a la de los demás alumnos. Aunque no se quedó en la zona de reunión, estaba claro que se dedicaba a contar.

Quiero llamar la atención sobre la habilidad con la que los profesores de educación especial como Hannah pasan de una enseñanza más explícita a otra más basada en la investigación cuando trabajan con sus alumnos. Utilizando la investigación guiada, diseña su clase para que sea significativa para sus alumnos. Permite que los alumnos elijan lo que cuentan, lo que permite a Juan contar un elemento que le importa. Pide a los alumnos que compartan sus estrategias, dejándoles siempre que lideren el camino con su propio pensamiento. Otros aspectos de su práctica son mucho más explícitos y proporcionan apoyo a los alumnos. También les recuerda el orden de los números con comentarios inmediatos, les anima a coger una tabla de centenas si necesitan un recordatorio y utiliza la repetición de números y rutinas para ayudarles. En otras palabras, utiliza múltiples herramientas para apoyar a sus alumnos, incluyendo el coaching estratégico o la asistencia individualizada. Nunca vi una lección de instrucción explícita para toda la clase, tal vez porque sus alumnos tienen tal variedad de conocimientos previos que una lección tan específica difícilmente podría funcionar para la mayoría, y desde luego no para toda la clase. Veo esta flexibilidad entre los enfoques basados en la investigación y la orientación más explícita todo el tiempo en los educadores especiales con experiencia.

Durante la reunión conmigo después de la lección, Hannah compartió el proceso de

aprendizaje de Juan en el conteo. Al principio, Juan no participaba en el conteo de colecciones. Cuando contaba, no parecía importarle si obtenía un número diferente al contar el mismo conjunto. Así que Hannah se esforzó por hacer que el conteo fuera más significativo para él. Una vez que encontró un objeto que le encantaba contar, lo hizo, y cuando contó el mismo conjunto y obtuvo 16 una vez y 17 otra, reconoció que se trataba de un problema que debía resolver. Durante la reunión, discutimos cómo a los alumnos como Juan a menudo se les asignaban tareas repetitivas y sin sentido. Hannah no asumió que Juan no pudiera realizar la tarea, sino que necesitaba cambiar la forma en que la estructuraba.

Hannah señaló durante nuestra reunión que no estaba segura de si la reunión con todo el grupo era una herramienta útil para su clase. Estaba comprometida con el desarrollo de la capacidad de sus alumnos para reflexionar sobre su propia resolución de problemas y hacerlos participar en la resolución de los problemas de sus compañeros, pero no necesitaba que su clase fuera exactamente igual que las demás, terminando con una larga puesta en común. Terminamos haciendo una lluvia de ideas sobre nuevas formas en las que ella podría llevar a cabo la puesta en común, posiblemente pasando a compartir por parejas las colecciones para terminar cada clase. ●

IDEAS FUNDAMENTALES: INVERTIR EN EL SENTIDO NUMÉRICO Y EL VALOR POSICIONAL

Los alumnos necesitan mucha experiencia con los números para desarrollar el sentido numérico, así como con el valor posicional, un componente importante del sentido numérico. Para comprender el valor posicional es fundamental la unificación, es decir, comprender y trabajar con grupos. La idea importante es unificar por decenas y centenas o ver cómo se crean los números a través de múltiplos de diez. Para comprender esto, los alumnos deben tener experiencia tanto en contar por decenas (y centenas, etc.) como en dividir números grandes en decenas (y centenas, etc.).

El valor posicional está integrado en nuestro sistema numérico, un sistema multiplicativo de base diez. Cada dígito simboliza un número diez veces mayor que el de la izquierda; la multiplicación está integrada en el propio sistema de notación. El valor posicional se enseña a menudo utilizando tablas de valor posicional, pero los niños pueden aprender fácilmente a rellenarlas sin comprender los grupos multiplicativos que hay detrás de los números. El valor posicional es mucho más que rellenar una tabla. Los alumnos deben comprender el valor posicional para entender cómo se cuenta el dinero y los decimales.

Contar colecciones y contar en coro son formas significativas de proporcionar mucha práctica a los niños con este pilar fundamental de las matemáticas. Durante el conteo, se anima a los alumnos a formar grupos que les resulten útiles, a menudo empezando por los 2, luego los 5 y luego los 10. Y después de contar lo suficiente, dividen los números en centenas. Cuando un alumno forma grupos de 10 y los utiliza para contar un conjunto grande, está desarrollando su capacidad de unificar. El conteo de colecciones comienza con el conteo de objetos reales, de modo que los alumnos basan este trabajo conceptual en objetos concretos. He visto a

profesores apresurarse a unificar, simplemente diciendo a los alumnos que ahora este palito representa un diez, o utilizando bloques de base diez antes de que el alumno comprenda realmente que el palito es tanto un diez como diez unos. Contar colecciones hace que el alumno forme esos grupos de diez y luego los divida de nuevo en unos, componiendo y descomponiendo los números en las unidades que componen los números más grandes.

Hannah comenzó el año con la rutina de contar colecciones y luego volvía a ella durante unos días entre cada nueva unidad matemática. De esta manera, Hannah trabajaba los principios básicos del conteo, el sentido numérico y el valor posicional con sus alumnos mediante una rutina repetida que les daba tiempo suficiente para desarrollar nuevas habilidades de conteo. Algunos niños trabajaban en la correspondencia uno a uno y la cardinalidad de los conjuntos que contaban, como Juan. Otros trabajaban en agrupar sus conjuntos en grupos de diez, algo que Hannah destacó en la puesta en común. Agrupar en decenas es una forma de comprender el complejo concepto del valor posicional, ya que nuestro sistema numérico es un sistema de base diez. George, que estaba en un aula autónoma debido a diferencias de comportamiento, trabajaba en la agrupación en centenas. La rutina de «Contar colecciones» permitía a los alumnos participar repetidamente en estas ideas fundamentales. También se diferencia de forma natural: la rutina sigue siendo la misma, pero Hannah proporciona un gran conjunto de objetos para George y otro de menos de 20 para Noemí. Cada día, el conjunto de números de Noemí era mayor, lo que la empujaba hacia números cada vez más grandes.

Ideas fundamentales similares sobre los números surgieron en el «Choral Count» (Recuento coral), cuando Hannah pidió a los alumnos que contaran desde 100 y un alumno preguntó si el mismo patrón se repetía después de 900. Si pasaba de 100 a 101, ¿pasaba de 900 a 901? Estas son ideas muy importantes para los alumnos de K-1. Comprender la lógica del sistema numérico, o el valor posicional, es una idea fundamental. El sentido numérico y el valor posicional son sin duda pilares fundamentales para el resto de las matemáticas; en otras palabras, estas ideas sobre los números y el sistema numérico son ideas matemáticas fundamentales que merecen una inversión significativa.

El sentido numérico y el valor posicional son sin duda pilares fundamentales para el resto de las matemáticas; en otras palabras, estas ideas sobre los números y el sistema numérico son conceptos matemáticos básicos que merecen una inversión significativa.

AMPLIAR LAS COLECCIONES DE CONTAR

Las colecciones de conteo pueden transformarse en otras actividades de conteo relacionadas, como las tiendas escolares. Cuando era maestra de recursos en Los Ángeles, tenía una tienda escolar en una esquina de mi salón, solo un estante con varios artículos que sabía que a los niños les gustaban. Tenía notas adhesivas con precios que cambiaba según los alumnos que venían a mi salón, ya que enseñaba a grupos pequeños desde jardín de infantes hasta sexto

grado. Algunos niños necesitaban decimales, mientras que otros no. Una de estas alumnas, Asia, tenía 8 años y síndrome de Down. Le encantaba jugar a la tienda. También pude enseñarle a usar una calculadora con una caja registradora de juguete. Era un reto para su profesora de educación general inclusiva porque se negaba a hacer las hojas de matemáticas que le daba su profesora en clase. Pero en mi aula, con la tienda, mientras «jugábamos», se involucraba profundamente en las matemáticas.




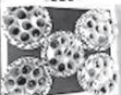




Cuando era profesora de quinto y sexto grado en la ciudad de Nueva York, hacía algo similar: llevaba a los alumnos con frecuencia a la bodega y a la tienda de mascotas del barrio. Aprovechábamos estas situaciones de la vida real para contar dinero, dar cambio y calcular costes. Relacionar las matemáticas con sus objetivos en el mundo real, como comprar artículos con dinero en efectivo en una tienda, es una parte importante de la enseñanza de las matemáticas para los alumnos con discapacidades.

La educadora especial Suzanne Huerta utiliza Counting Collections en su clase de educación especial para alumnos de quinto grado. Sus alumnos ya habían estado utilizando Counting Collections cuando algunos se preguntaron cuántos Legos había en total en el aula. Comenzaron a contar los Legos y finalmente decidieron hacer grupos de diez en pequeños vasos de papel. Aquí están los Legos apilados en vasos de diez, en platos de 100.



FUENTE: Reproducido con permiso de Suzanne Huerta.

A continuación, la Sra. Huerta guió a los alumnos para que pensarán en los números utilizando el recuento.

				El conteo de colecciones de Legos de nuestra clase			
Miles	Cientos	Dieces	Unos				
			1		$1 \times 1 = 1$		
		1	0		$1 \times 10 = 10$	vaso Legos	
	1	0	0		$10 \times 10 = 100$	vasos Legos	
1,	0	0	0		$10 \times (10 \times 10) = 1,000$	platos vasos Legos	
2,	3	1	3				
							
							
							
				$2,000 + 300 + 10 + 3 = 2,313$			

FUENTE: Reproducido con permiso de Suzanne Huerta.

Aquí podemos ver el poder de utilizar tablas de valor posicional después de que los alumnos hayan contado y organizado este conjunto gigante. ¡Ahora la tabla de valor posicional tiene sentido!

Contar colecciones y/o contextos de tiendas puede ayudar a los alumnos a comprender el siguiente paso en el valor posicional: los decimales. Contar dinero en sí mismo proporciona una práctica importante en la unificación. A veces veo a los alumnos contar tres monedas de diez centavos y una de un centavo como «10, 20, 30, 40». Para comprender las monedas, los alumnos tienen que unificar. Los alumnos deben comprender que una moneda de diez centavos es lo mismo que 10 centavos (o 10 monedas de un centavo). Este concepto es complejo, pero vale la pena dedicarle tiempo para que los alumnos lo aprendan.

Los alumnos deben comprender que una moneda de diez centavos equivale a 10 centavos (o 10 monedas de un centavo). Este concepto es complejo, pero vale la pena dedicarle tiempo para que los alumnos lo aprendan.

APLICAR IDEAS BÁSICAS PARA APOYAR A LOS ESTUDIANTES QUE NECESITAN MÁS TIEMPO

Una de mis alumnas de quinto grado, Tami, que tenía síndrome de Williams, era una niña

simpática y divertida que amaba su identidad puertorriqueña y le encantaba la música. Tami era absolutamente capaz de aprender cosas nuevas, pero por lo general no aprendía al mismo ritmo que los demás alumnos de la clase. Así que, al planificar cada unidad de matemáticas, me aseguraba de identificar cuál era la idea central de la unidad, que sería mi objetivo principal con Tami.

Tami, como todos los demás alumnos, tenía un conjunto único de fortalezas y desafíos en matemáticas. Venía de una escuela tradicional y había aprendido los procedimientos de suma, resta y multiplicación. En general, podía realizar estas operaciones con precisión, pero podía tener dificultades para emparejar una matriz de 3×4 o para entender por qué 2 grupos de 6 eran 12. Debido a una combinación de problemas visuales y de motricidad fina, no siempre podía contar objetos con éxito. No estaba acostumbrada a utilizar elementos visuales ni a hablar sobre por qué funcionaba un procedimiento. Sentí que Tami necesitaba más experiencias para dar sentido a lo que estaba haciendo, en particular conectar elementos visuales y manipulativos con símbolos numéricos.

Por ejemplo, un día nos enfrentamos a un problema para calcular el volumen mientras rediseñábamos las peceras de nuestra clase.

ESTOY PENSANDO en comprar un pez para el aula. La persona de la tienda de mascotas me dijo que este pez necesita 60 pulgadas cúbicas de espacio en su pecera. Me pregunto qué dimensiones son posibles para esta cantidad de espacio. ¿Podemos averiguar todas las posibilidades? También podrías empezar jugando con 12 pulgadas cúbicas. ●

Pruébal

¿Cuántas posibilidades puedes encontrar? ¿Con números enteros? ¿Con fracciones?
¿Cómo lo resolverías si tuvieras cubos conectables?

La idea central de este problema era la relación entre el volumen y la propiedad asociativa de la multiplicación (¿una caja de $2 \times 3 \times 2$ es igual que una caja de $2 \times 2 \times 3$?). Estaba bastante segura de que empezar con el número 60 sería abrumador para Tami y que quizá no llegaría a comprender las ideas fundamentales sobre el volumen y la propiedad asociativa. Así que le di a la clase la opción de empezar con 12 si lo preferían, y puse montones de cubos conectables en cada mesa. Tami estaba sentada con un grupo de amigos, que estaban trabajando con 60. Tami decidió empezar con 12. Vi cómo sus compañeros se acercaban a ella y le preguntaban por su disposición de los 12. Tami necesitaba muchos cubos, ya que prefería hacer cada combinación y mantenerla físicamente delante de ella en lugar de desmontarla. Se le ocurrieron cuatro formas diferentes de hacer el tanque, y pude animarla a que se asegurara sistemáticamente de que las había hecho todas y las anotara utilizando paréntesis, cumpliendo así mis objetivos para ella en cuanto a la comprensión y representación de la propiedad asociativa.

Mi trabajo con Tami se basó en este concepto de ideas fundamentales. ¿Cuál era la idea más importante de esta lección? ¿Y qué posibilidades ofrece para abordar ideas fundamentales anteriores? Pude involucrar a Tami en el objetivo del nivel de su grado, que era resolver problemas con la propiedad asociativa y hallar el volumen, y darle más oportunidades para trabajar en una idea fundamental: conectar la multiplicación con modelos visuales.

Presento esta historia no porque piense que fue una práctica perfecta, sino porque fue una solución viable y equitativa. Tami pudo participar en una lección de su nivel, pero tuve que modificar algunos aspectos de la tarea: necesitaba una opción con números más pequeños y necesitaba los manipulativos para recordar las diferentes casillas. Pero esas no fueron adaptaciones especiales para Tami. Ofrecí las mismas adaptaciones a todos los alumnos. Otros alumnos eligieron empezar con 12, incluidos algunos que estaban más familiarizados con la multiplicación. Además, al integrar la elección, le recordé a Tami que ella tiene el control de su educación, que puede tomar decisiones sobre su aprendizaje que le funcionen.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Cómo puede la actividad didáctica «Contar colecciones» ayudar a los alumnos a trabajar las ideas básicas del conteo, el sentido numérico y el valor posicional? ¿Diría usted que «Contar colecciones» es una actividad diferenciada? ¿En qué sentido?
2. ¿En qué ideas fundamentales invierte con sus alumnos?
3. ¿Cómo pueden las ideas fundamentales ayudar a los alumnos con discapacidad intelectual en entornos inclusivos?

Participación	Representación	Acción estratégica
Hannah elige una rutina para involucrar a los alumnos y apoyar su comportamiento, ya que ellos conocen las expectativas. Trabaja para ayudar a sus alumnos a realizar actividades grupales de matemáticas, como el conteo coral, con el fin de desarrollar una comunidad matemática.	Hannah diseña en torno a dos ideas fundamentales con las que los alumnos se involucrarán durante el recuento de colecciones: el recuento y el valor posicional. La rutina en sí misma es multimodal, ya que los alumnos cuentan objetos concretos y luego los representan en papel o en una tableta.	Hannah trabaja para ayudar a sus alumnos a ser más estratégicos en su recuento, a utilizar estrategias como el etiquetado y a empezar a agrupar sus objetos en grupos de 10.

Desglosando una idea central: el desarrollo del conteo

¿Cómo aprenden los alumnos a contar? Hay algunos principios importantes para aprender a contar (Franke et al., 2018).

Secuencia de conteo

Los nombres de los números siguen una secuencia ordenada, siempre la misma. Hay patrones en nuestro sistema de conteo (excepto en los complicados números del 10 al 19).

Correspondencia uno a uno

Cada objeto que se cuenta corresponde exactamente a un número. Podemos ver esto en la forma en que los niños etiquetan los objetos mientras dicen los números.

Cardinalidad

Comprender que el resultado del conteo es el tamaño del conjunto. En otras palabras, el último número al que se llega en un conteo es la cantidad total. Una forma de evaluar esto es preguntarle a un alumno que acaba de terminar de contar un conjunto: «¿Cuántos hay?». Para más información sobre la evaluación de estos conceptos, consulte el recuadro «Tres tareas de conteo» del capítulo 3, en la página 48.

Otro avance importante en la aritmética temprana es la subitización o el reconocimiento instantáneo de una pequeña cantidad, como 2 o 3.

Los alumnos aprenden las reglas del conteo contando con retroalimentación, ya sea en casa con sus familias o en la escuela con sus compañeros y profesores. Los alumnos necesitan muchas oportunidades para contar a fin de desarrollar estas ideas y practicar su uso, en particular algunos alumnos neurodivergentes que pueden tener fortalezas en un área del conteo mientras aún se están desarrollando en otras.

Descripciones de imágenes y figuras

Póster de la colección de conteo de la Sra. Huerta

El póster muestra imágenes de Legos, vasos de papel, platos de papel y pilas de platos. El póster desglosa el número de ladrillos de la siguiente manera.

1 Lego. 1 por 1 es igual a 1.

1 vaso de papel lleno con 10 ladrillos Lego. 1 vaso por 10 Legos es igual a 10.

10 vasos llenos de 10 ladrillos Lego. 10 vasos por 10 Legos es igual a 100.

10 platos llenos de 10 vasos llenos de 10 ladrillos Lego. 10 platos por 10 vasos por 10 Legos es igual a 1000.

20 platos llenos de 10 vasos llenos de 10 ladrillos Lego. 10 platos por 10 vasos por 10 Legos es igual a 2000.

3 platos llenos de 10 vasos llenos de 10 ladrillos Lego. 2 platos por 10 vasos por 10 Legos es igual a 300. Hay 13 ladrillos Lego adicionales.

2000 más 300 más 13 es igual a 2313 piezas de Lego.

CAPÍTULO 8 DISEÑO PARA APOYAR LA VARIABILIDAD LINGÜÍSTICA

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Visitar una clase de educación especial de K-3 mientras los alumnos resuelven problemas de suma relacionados con historias.

Explorar cómo apoyar la resolución de problemas a los alumnos que necesitan ayuda adicional en el procesamiento del lenguaje

Explorar cómo apoyar a los alumnos multilingües con discapacidades a través de la agencia matemática

El momento en que me di cuenta de la magia que se respiraba en la clase de educación especial de Kayla Martínez ([Figura 8.1](#)) fue cuando los alumnos salieron del área de reunión, justo después de que ella hubiera presentado un problema matemático sobre malvaviscos y chocolate caliente. Los alumnos, bastante jóvenes, se movían por el aula con determinación. Algunos cogieron papel y cubos de conexión. Otros fueron a por rekenreks (también llamados «rack matemáticos»), marcos de diez o bloques de base diez. Algunos alumnos empezaron a trabajar solos, otros se quedaron atrás para hacerle una pregunta a Kayla y otros se sentaron junto a un amigo. Un niño cogió los materiales y se sentó junto a un asistente. Lo que vi

decisiones sobre cómo resolverlos.

Figura 8.1 • Kayla, maestra de educación especial de K-3

La clase de Kayla incluía alumnos desde jardín de infancia hasta 3.º grado, lo que supone un amplio rango de edades para cualquier clase. Los alumnos no solo tenían diferentes niveles de conocimientos previos sobre números y sumas, sino que también presentaban una serie de diferencias en el procesamiento del lenguaje. Todos los alumnos de Kayla tenían programas de educación individualizados (IEP). La mayoría de ellos tenían dificultades de aprendizaje, que pueden incluir dificultades tanto en el lenguaje expresivo (lo que los niños pueden decir) como en el lenguaje receptivo (lo que pueden entender). Todos sus alumnos



de este año recibieron servicios de logopedia y lenguaje. Además, tenía alumnos que también eran multilingües. El problema práctico de Kayla era asegurarse de que las dificultades en el procesamiento y la comprensión del lenguaje no afectaran al acceso de sus alumnos a las matemáticas basadas en la investigación.

Mientras acercaba una silla para observar la clase, Kayla planteó el problema del día. El problema era el siguiente:

Al Sr. C (el profesor de arte) le encantan los malvaviscos en su chocolate caliente. Primero, añadió ___ malvaviscos. Luego añadió ___ malvaviscos más. Por último, añadió ___ malvaviscos más para dar buena suerte. ¿Cuántos malvaviscos añadió a su chocolate caliente?

Elige tu conjunto de números: (4, 5, 9), (6, 7, 19) (173, 36, 86).



FUENTE: Reimpreso de [istock.com/baibaz](https://www.istock.com/baibaz) .

Pruébal

Resuelve el problema con cada uno de los diferentes conjuntos de números. ¿Qué observas en este problema? ¿Qué estrategias utilizarían los alumnos? ¿Las estrategias utilizadas serían diferentes para los distintos conjuntos de números?

Kayla comenzó a plantear este problema asegurándose de que todos sus alumnos comprendieran el contexto de la preparación del chocolate caliente. Utilizando un micrófono para ayudar a los alumnos con discapacidad auditiva, les preguntó qué sabían sobre el chocolate caliente. A continuación, se produjo un breve debate sobre si los malvaviscos son un buen complemento para el chocolate caliente (¡al parecer, sí!). Kayla explicó entonces cómo prepara ella el chocolate caliente y mostró un breve vídeo de alguien preparando chocolate caliente, incluyendo la adición de malvaviscos al final.

A continuación, Kayla reveló el problema en un papelógrafo sin números, lo que a veces se denomina «problema sin números» (Bushart, <https://numberlesswp.com/>). Utilizar un problema sin números es una forma estupenda de conseguir que los alumnos empiecen por el significado y no se precipiten a hacer cálculos. Puede ayudar a los alumnos a evitar lo que yo denomino «ensalada de números» (cuando los alumnos simplemente cogen números y los mezclan). Los alumnos aprenden a hacer esto cuando no se les da suficientes oportunidades para que comprendan los problemas por sí mismos. Sin los números, los alumnos pueden centrarse primero en comprender la acción del problema.

Utilizar un problema sin números es una forma estupenda de conseguir que los alumnos empiecen por el significado y no se precipiten a hacer cálculos.

Kayla leyó el problema en voz alta mientras señalaba el texto para facilitar la comprensión. Kayla comentó que siempre se asegura de explicar no solo los sustantivos desconocidos,

sino también los verbos, que pueden resultar complicados para sus alumnos. Para facilitar el aprendizaje de los verbos en este contexto, hizo mímica de «añadir» malvaviscos mientras decía la palabra y la señalaba. Por último, Kayla volvió a hacer preguntas de comprensión a los alumnos para asegurarse de que entendían el lenguaje y el contexto. Durante toda la actividad, pidió a los alumnos que se giraran y hablaran, no solo para reformular los problemas con sus propias palabras, sino también con preguntas de comprensión específicas adaptadas al contexto.

Solo entonces Kayla mostró a los alumnos los conjuntos de números. Sus alumnos iban desde jardín de infancia hasta tercer grado y tenían diferentes niveles en matemáticas. En este caso, las opciones numéricas eran

(4, 5, 9), (6, 7, 19) (173, 36, 86)

Permitir a los alumnos elegir un conjunto de números es un gran ejemplo de cómo la elección puede desarrollar el pensamiento estratégico en los alumnos. En lugar de repartir diferentes hojas de trabajo con diferentes niveles de conjuntos de números, Kayla pide a los alumnos que elijan por sí mismos. La disponibilidad del siguiente conjunto de números ofrece una tarea de ampliación automática para los alumnos que terminan el primer conjunto de números que prueban. Si los alumnos eligen constantemente números que no les sirven, podemos hacerles un coaching estratégico y preguntarles por qué han elegido un conjunto concreto.

A medida que los alumnos comenzaban a trabajar en el problema, se ofrecían diferentes opciones para participar. Los alumnos hablaban tanto en inglés como en español mientras trabajaban. Los alumnos trabajaban en parejas, de forma independiente o con un asistente. Estaba claro que los alumnos sabían dónde estaban los materiales manipulativos y se sentían seguros para tomar sus propias decisiones sobre qué utilizar. Una vez más, permitir que los alumnos elijan significa que están aprendiendo qué herramientas les funcionan, desarrollando así su propia comprensión estratégica.

Kayla se acercó a cada niño y les hizo dos preguntas sencillas: «¿Cuántos malvaviscos hay?» y «¿Cómo lo sabes?». Les hizo preguntas de seguimiento sobre los detalles de sus estrategias y animó a los alumnos a hablar entre ellos. La observé mientras hablaba con un niño, Hugo, que había cogido bloques de base diez y estaba utilizando el conjunto de números más grande posible (173, 36, 86). Podíamos ver tres pilas de bloques de base diez delante de él, una pila para cada número. Cuando Kayla le preguntó «¿Cuántos?», él empezó por la primera pila y contó de uno en uno, utilizando los cuadrados individuales de cada bloque de base diez para contar en lugar de la cantidad total. Pronto perdió la cuenta y volvió a empezar. Kayla lo observaba en silencio. Cuando terminó, le pidió a Hugo que representara su razonamiento en un papel.

Kayla me dijo más tarde que pensaba que reescribir las cantidades le ayudaría a desarrollar su comprensión de estos números más grandes y, en particular, le animaría a trabajar con unidades numéricas más grandes que uno. Su representación (Figura 8.2) hizo precisamente eso, ya que representó el bloque de 100 como una unidad de 100 (en lugar de contar de uno en uno) y los bloques de 10 como una unidad de 10. A continuación, contó con unidades de 100 y 10, empezando por el 100, contando de diez en diez y luego de uno en uno.

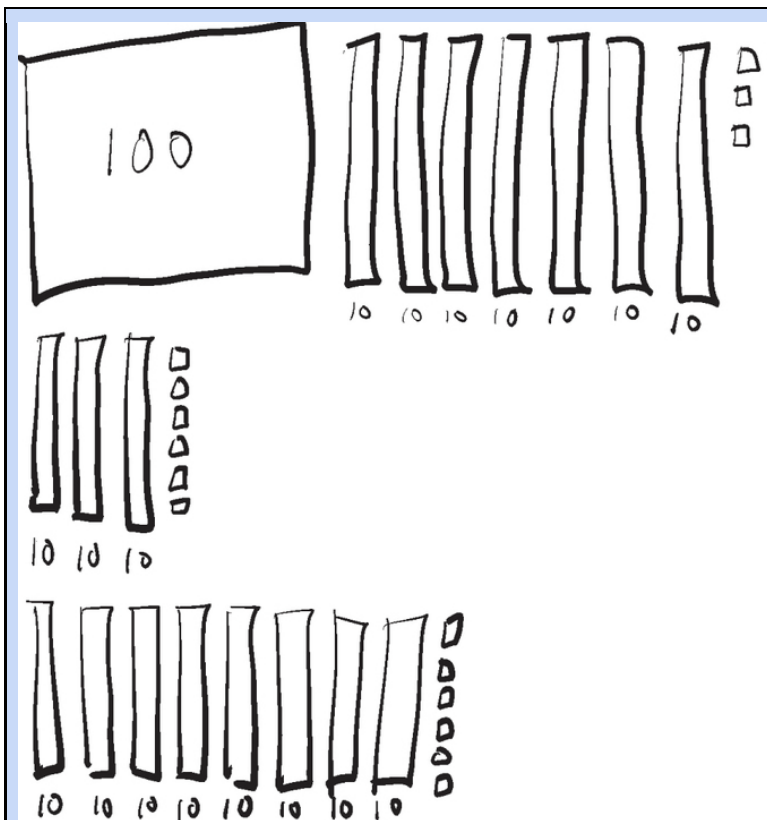


Figura 8.2 • Trabajo escrito de Hugo para $173 + 36 + 86$

Al igual que en Contar colecciones (capítulo 7), la representación del pensamiento en papel (o digitalmente) empuja a los estudiantes a pasar de lo concreto a lo más abstracto, y puede ayudarles a unificar, lo cual es fundamental para desarrollar la comprensión del valor posicional. El valor posicional, a su vez, subyace a múltiples estrategias para la suma con números de varios dígitos. Al pedirle a Hugo que vuelva a representar su estrategia en otra modalidad, Kayla le empuja a reflexionar sobre su estrategia. Cada iteración de la estrategia de un estudiante conlleva un pequeño refinamiento, una mayor claridad para el alumno.

En toda la clase, la mayoría de los alumnos utilizaban el modelado directo para este problema (dibujando o contando cada elemento), y algunos contaban a partir del número más grande. Al final de la clase, todos los alumnos habían resuelto este problema de suma utilizando al menos un conjunto de números.

Cuando los alumnos terminaron, Kayla les pidió que registraran sus estrategias en una aplicación de sus tabletas. Cada alumno tomó una foto de su trabajo, tanto de su hoja de registro como de sus manipulativos, si los habían utilizado. A continuación, los alumnos grabaron un breve archivo de audio en el que explicaban su estrategia. La mayoría de los alumnos parecían sentirse cómodos con este proceso y registraron sus estrategias por su cuenta. Vi a un alumno, Diego, que se acercó a un asistente docente y le describió su estrategia. Empezó con vacilación, pero pareció ganar confianza a medida que hablaba. Cuando terminó, el asistente le pidió que grabara su estrategia. Hacer que los alumnos compartan sus estrategias individualmente antes de compartirlas con todo el grupo se denomina «ensayo». Los ensayos pueden ser especialmente útiles para ayudar a los

alumnos que son tímidos o necesitan más tiempo para planificar su respuesta verbal.

El siguiente paso fue compartir. Kayla reunió a sus alumnos delante de la clase, sobre la alfombra. Cada alumno que compartió su respuesta utilizó un micrófono para amplificar su voz, al igual que Kayla. Durante la sesión, Kayla pidió a dos alumnos que compartieran sus estrategias de modelado directo. La primera niña se levantó y mostró cómo utilizó un marco de diez para resolver $4 + 5 + 9$. El segundo alumno mostró cómo utilizó un ábaco para resolver el mismo problema. El último alumno fue Hugo, el que había utilizado bloques de base diez para $173 + 36 + 86$. Compartió cómo tuvo que contar varias veces para encontrar la respuesta correcta y cómo cambió su respuesta. También compartió cómo los bloques de base diez le ayudaron a resolver un problema tan grande. A medida que los alumnos se acercaban para compartir, Kayla representaba su razonamiento en un papelógrafo. Los alumnos utilizaron esta representación de su razonamiento mientras compartían, por ejemplo, Hugo, contando en las representaciones que Kayla había hecho de sus bloques de base diez (Figura 8.3).



Figura 8.3 • Hugo comparte, con la ayuda de Kayla

APOYO LINGÜÍSTICO DURANTE LOS PROBLEMAS MATEMÁTICOS CONTEXTUALES

Como profesora formada en el pensamiento matemático de los alumnos a través de la enseñanza guiada cognitivamente (CGI), Kayla utilizó problemas narrativos en secuencias para desarrollar conceptos y estrategias matemáticas concretas (véase «Desglosar una idea fundamental: suma y resta tempranas con problemas narrativos» en la página 138). Su trabajo se basa en la investigación de que los alumnos pueden desarrollar tanto un fuerte sentido numérico como la comprensión de las operaciones trabajando en contextos de la vida real (Carpenter et al., 2015). Ella utiliza la indagación guiada con sus alumnos.

Una crítica a las matemáticas basadas en la indagación es que, dado que las matemáticas están integradas en el lenguaje, la carga cognitiva de las matemáticas más el lenguaje puede llegar a ser abrumadora. La carga cognitiva se refiere a la cantidad de información que nuestra memoria de trabajo puede procesar a la vez. Entiendo que la carga cognitiva puede ser un problema para la comprensión. Personalmente, no puedo prestar atención a una conversación cuando hay un televisor encendido de fondo; parece que no puedo entender ninguna de las dos cosas si se producen al mismo tiempo. Si a los alumnos, especialmente a aquellos que pueden tardar más en procesar el lenguaje, se les pide que procesen contextos desconocidos y que empiecen a resolver un problema matemático complejo al mismo tiempo, no pueden hacer ambas cosas a la vez sin ayuda.

Esta dificultad puede ser real, pero nunca debe servir de excusa para excluir a los niños de la resolución de problemas matemáticos complejos. He oído utilizar la expresión «carga cognitiva» para disuadir a los profesores de incluir a los alumnos con discapacidades en la resolución de problemas basada en la investigación. Este problema no es insuperable, como nos muestra Kayla. Siempre que los alumnos comprendan el contexto del problema y la acción que se produce, pueden resolverlo utilizando cualquier lenguaje y cualquier material manipulativo que les resulte útil. Con solo familiarizarles con el problema, se reduce la carga cognitiva. De hecho, se recomienda utilizar contextos auténticos tanto para los alumnos con dificultades de aprendizaje como para los alumnos multilingües (Kelemanik et al., 2016).

Con solo familiarizar al alumno con el problema, se reduce la carga cognitiva.

Otro argumento que he oído sobre el uso de las matemáticas basadas en la investigación es que los alumnos no deben resolver problemas sin los conocimientos previos suficientes. Algunos dirían que no se puede plantear este problema a los alumnos hasta que no sepan sumar. Pero está claro que todos estos alumnos, con distintos conocimientos previos, fueron capaces de resolverlo siempre que pudieran hacerlo de una manera que tuviera sentido para ellos. ¿Es el conocimiento previo necesario el procedimiento abstracto y simbólico de $4 + 5 + 9 = 18$? ¿O es el conocimiento previo necesario que el estudiante comprenda la historia de los malvaviscos, sepa contar y comprenda que la acción del problema es combinar diferentes cantidades? Con ese conocimiento, los estudiantes pueden representar y resolver el problema. En cierto modo, el conocimiento previo más importante es que estos alumnos creen que pueden resolver un problema sin que se les diga exactamente cómo hacerlo. Estos alumnos no esperaron a que se les diera una estrategia. Empezaron de inmediato, tomando decisiones sobre qué manipulativos utilizar y qué estrategia emplear. Pude ver lo cómodos que se sentían resolviendo problemas sin que se les dijera qué procedimiento utilizar. Esa confianza viene dada por las numerosas oportunidades que han tenido para resolver problemas.

El conocimiento previo más importante es que estos alumnos creen que pueden resolver un problema sin que se les diga exactamente cómo hacerlo.

Al final, los alumnos de esta clase de educación especial autónoma resolvieron con éxito un problema de palabras con múltiples sumandos utilizando sus propias estrategias.

Reconozco el éxito de Kayla al facilitar una clase con múltiples niveles de habilidad. Todos sabemos que puede ser difícil planificar las matemáticas cuando los alumnos tienen diferentes niveles. Kayla tiene una gama excepcionalmente amplia de habilidades entre los alumnos de su clase, ya que estos están en cuatro cursos diferentes (desde infantil hasta tercero de primaria) y tienen discapacidades que pueden afectar a su desarrollo matemático. Como señalamos en el capítulo 3, los alumnos con neurodiversidad pueden tener trayectorias matemáticas interesantes. Su desarrollo puede llevar más o menos tiempo en determinados temas. Algunos de sus alumnos están trabajando para comprender los números y empezar a contar. Otros alumnos están trabajando con sumas de varios dígitos en los cientos. La estrategia de Kayla para abordar la variabilidad de los alumnos es ofrecerles opciones.

APOYO A LOS ESTUDIANTES MULTILINGÜES

La elección también es un elemento clave en la forma en que Kayla apoya a sus alumnos multilingües. En primer lugar, es importante rechazar el pensamiento deficitario sobre los alumnos multilingües. Ser bilingüe aporta beneficios sociales y cognitivos (Marian y Shook, 2012). El bilingüismo es un don. Sin embargo, cuando las escuelas tratan a los alumnos multilingües como si fueran un problema, creamos problemas para estos alumnos. Utilizando el modelo social, podemos ver que el problema no es un niño con la oportunidad de aprender dos idiomas, sino un sistema escolar que es inflexible en cuanto al idioma en el que aprende el niño. El idioma es una barrera si lo convertimos en una. Por lo tanto, debemos empezar por una perspectiva basada en los activos.

El idioma es una barrera si lo convertimos en una. Por lo tanto, debemos comenzar con una perspectiva basada en los activos.

No debemos eliminar ni simplificar el idioma, sino facilitar el acceso al mismo (Moschkovich, 2012). Queremos que los estudiantes multilingües tengan acceso a entornos lingüísticos ricos que les ofrezcan muchas oportunidades para escuchar y hablar. Los estudiantes que aprenden un segundo idioma necesitan oportunidades para practicar su nuevo idioma, así como para volver a su primera lengua si esta les facilita el acceso. El acceso puede apoyarse en la enseñanza multimodal, como demostró Kayla, utilizando imágenes, vídeos y gestos. Las mejores prácticas para apoyar a los alumnos multilingües en matemáticas incluyen repetir las estrategias de los alumnos, hacer preguntas aclaratorias y utilizar gestos para comunicar ideas matemáticas (Moschkovich, 1999).

Al pensar en el trabajo de Kayla, recurro a la investigación de la Dra. Juanita Silva, experta en matemáticas significativas para estudiantes multilingües con dificultades de aprendizaje. Su

investigación documenta cómo los estudiantes pueden dar sentido a problemas difíciles cuando ambos idiomas se consideran recursos, cuando se les da acceso a múltiples idiomas y cuando se les anima a dar sentido a las matemáticas utilizando lo que saben. En un estudio, la Dra. Silva describió su trabajo con un grupo de tres estudiantes que resolvían problemas de CGI (Silva, 2021). La Dra. Silva, que es bilingüe, alternaba entre el español y el inglés mientras enseñaba, respondiendo al idioma que utilizaban los estudiantes y a si parecían necesitar una idea o pregunta en otro idioma. Los estudiantes comprendieron los problemas tanto en español como en inglés. Este ejemplo utiliza múltiples modalidades para apoyar las fortalezas de los estudiantes, ofreciendo (y valorando) ambos idiomas y permitiendo a los estudiantes tomar la iniciativa en lo que les ayuda más en cada caso concreto. Este tipo de enseñanza receptiva es un regalo que los educadores bilingües pueden ofrecer a los estudiantes.

La Dra. Silva descubrió que estos alumnos demostraban capacidad matemática cuando se les daba a elegir mientras trabajaban. Descubrió que los alumnos respondían bien a la posibilidad de elegir el idioma en el que

1. Idioma hablado
2. Qué estrategias matemáticas utilizar
3. Si trabajar individualmente o con otros
4. Cómo participar en los debates

Además, apoyó a estos estudiantes creando muchas oportunidades para que participaran en debates matemáticos, incluyendo preguntas del profesor sobre los detalles de lo que hacían matemáticamente. También veo estos elementos de elección en el aula de Kayla. Dado que sus estudiantes necesitan apoyo adicional para procesar el lenguaje, Kayla les da muchas opciones sobre cómo participar, así como oportunidades para revisar su lenguaje y sus matemáticas.

En el trabajo del Dr. Silva y Kayla, podemos ver cómo apoyar a los alumnos en el lenguaje matemático es, en primer lugar, una cuestión de confianza. Debemos asumir que estos alumnos tienen ideas matemáticas y pueden resolver problemas complejos. A continuación, debemos proporcionarles acceso a problemas complejos a través de una enseñanza multimodal y rica en lenguaje. Otra característica fundamental es la elección, para que los alumnos puedan desarrollarse como creadores de sentido estratégicos y aprender a confiar en su propio pensamiento.

PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

1. ¿Qué sabe sobre las diferencias en el procesamiento del lenguaje? ¿Cómo ha afectado a los alumnos de su clase de matemáticas la dificultad para comprender y producir lenguaje? ¿Cómo ha apoyado a estos alumnos?
2. Reflexionando sobre las acciones de Kayla y el Dr. Silva como docentes, ¿cómo responderías a tus alumnos multilingües con dificultades específicas de aprendizaje en matemáticas?

3. Si le dijeran que los alumnos con dificultades de aprendizaje y/o diferencias en el procesamiento del lenguaje no pueden «manejar» las matemáticas basadas en la investigación, ¿qué respondería?

Participación	Representación	Acción estratégica
Kayla abre el aula utilizando un problema central basado en una historia. Aunque sus alumnos trabajan en diferentes objetivos matemáticos y tienen diferentes necesidades de apoyo, ella crea una comunidad y un propósito colectivo al plantear un problema central, con múltiples conjuntos de problemas, múltiples herramientas disponibles (rekenrek o marco de decenas) y diferentes formas de participación (trabajar solo, con un compañero o con un asistente). La elección es fundamental en su aula.	Kayla apoya a través de la multimodalidad. Comienza la presentación con una narración visual, acompañada de gestos. Ayuda a los alumnos a leer el texto del problema mediante la lectura en voz alta, los gestos y las comprobaciones de comprensión. Los alumnos pueden elegir qué representaciones utilizan para resolver el problema.	A medida que lo resuelven, ella les pregunta sobre sus estrategias, desarrollando su autocomprensión como aprendices. Los alumnos ensayan para compartir practicando cómo compartir su estrategia. La elección desarrolla la autocomprensión, ya que los alumnos deben pensar en lo que les funciona mejor.

Desglosar una idea central: suma y resta tempranas con problemas narrativos

La suma y la resta son ideas fundamentales en matemáticas. Los alumnos comienzan la suma y la resta son ideas fundamentales en matemáticas. Los alumnos comienzan la escuela con intuiciones naturales sobre la suma y la resta a través de situaciones como añadir malvaviscos al chocolate caliente. Podemos aprovechar la intuición de los alumnos comenzando la enseñanza de la suma y la resta a través de problemas con historias (Carpenter et al., 2015). Podemos representar y/o leer en voz alta estos sencillos problemas verbales a los alumnos. Se les da a elegir cómo resolverlos, utilizando cualquier forma de escritura, dibujo o manipulativos que les resulte lógico.

Las situaciones de suma y resta tienen ciertos tipos de acciones incorporadas (véase la tabla 8.1). Por lo general, comenzamos con las que son más fáciles de ver y replicar para los niños mediante el modelado directo. Los problemas para los que los niños no pueden utilizar fácilmente el modelado directo son más complicados. Este tipo de problemas no se resuelven de una sola vez; los alumnos necesitan múltiples experiencias con ellos para comenzar a generalizar los esquemas incorporados.

Tipo de problema	Cómo interpretan los alumnos la acción con el modelado directo
Problemas de unión Rachel tiene 4 manzanas y recibe 5 más. ¿Cuántas manzanas tiene ahora?	Los alumnos suelen construir (o dibujar) ambos conjuntos y luego los cuentan todos.
Problemas separados Rachel tiene 15 clips y pierde 9. ¿Cuántos clips tiene ahora?	Los alumnos suelen construir el primer conjunto (15 clips) y luego separar (9 clips), para finalmente contar lo que queda.
Problemas comparativos Rachel tiene 6 gominolas y Kayla tiene 9 gominolas. ¿Cuántas gominolas más tiene Kayla?	Los alumnos suelen contar los conjuntos y luego los comparan, a veces alineándolos para compararlos.
Problemas de partes y total Rachel tiene 4 manzanas y 5 peras. ¿Cuántas piezas de fruta tiene?	Los alumnos pueden contar ambos conjuntos y luego contar todos. En este tipo de problema, los objetos son diferentes y los alumnos tienden a empezar con los conjuntos separados.

¿Qué tipo de problema era el problema de los malvaviscos de Kayla?

Hay formas más complicadas de cada uno de estos tipos de problemas. Piensa en este problema:

Rachel tiene 9 donuts. Consiguió algunos donuts más en la sala de profesores. Ahora tiene 14 donuts. ¿Cuántos consiguió en la sala de profesores?

¿De qué tipo de problema se trata?

Este problema es un problema de unión, pero ahora el sumando es desconocido en lugar de la suma. Los alumnos pueden sacar 9 cubos, añadir cubos hasta llegar a una pila de 14 cubos y luego contar cuántos han añadido. Si les pides que escriban una ecuación, la mayoría de los niños pensarán que este problema es $9 + ? = 14$. Lo consideran una suma, pero una suma complicada. Les lleva tiempo (y múltiples exposiciones a este tipo de problema) verlo como una resta, como $14 - 9$, ya que no ven la acción como una sustracción.

Los alumnos resuelven inicialmente estos problemas utilizando el modelado directo y luego estrategias como contar a partir de un conjunto. Con el tiempo, serán capaces de utilizar estrategias como las de la siguiente sección, utilizando hechos derivados.

Más información:

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (2015). Las matemáticas de los niños: Instrucción guiada cognitivamente (2.^a ed.). Heinemann.

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 8.2 • Trabajo escrito de Hugo para $173 + 36 + 86$

El dibujo muestra el trabajo de Hugo de la siguiente manera.

El número 173 se representa de la siguiente manera.

100 se presenta como un rectángulo grande.

El 10 se representa con un rectángulo estrecho. Hay 7 rectángulos estrechos que representan el 70.

3 cuadrados pequeños representan el 3.

El número 36 se representa de la siguiente manera.

3 rectángulos estrechos representan 30.

6 cuadrados pequeños representan el 6.

El número 86 se representa de la siguiente manera.

8 rectángulos estrechos representan 80.

6 cuadrados pequeños representan 6.

Figura 8.3 • Hugo comparte, con la ayuda de Kayla

La pregunta está escrita en la pizarra de la siguiente manera.

Al señor C, el profesor de arte, le encantaban los malvaviscos en su chocolate caliente.

Primero, añadió malvaviscos en blanco. Luego añadió más malvaviscos en blanco. Por último, añadió más malvaviscos en blanco para dar buena suerte. ¿Cuántos malvaviscos añadió a su chocolate caliente?

Hugo muestra cómo resolvió el problema de $173 + 36 + 86$ utilizando el método de base 10.

El número 173 se representa de la siguiente manera.

100 se representa como un rectángulo grande.

El 10 se representa con un rectángulo estrecho. Hay 7 rectángulos estrechos que representan el 70.

3 cuadrados pequeños representan 3.

El número 36 se representa de la siguiente manera.

3 rectángulos estrechos representan 30.
6 cuadrados pequeños representan el 6.
El número 86 se representa de la siguiente manera.

8 rectángulos estrechos representan 80.
6 cuadrados pequeños representan 6.

CAPÍTULO 9 DISEÑO PARA LA COMPRENSIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Visitaremos un aula inclusiva de segundo grado en la que se desarrolla la comprensión de la recta numérica.

Debatiremos la importancia de los modelos matemáticos.

Observaremos una cadena numérica con la recta numérica como modelo

Había trabajado con Dina Williams durante varios años en su función como líder matemática del distrito cuando decidió volver a las aulas (Figura 9.1).



Figura 9.1 • Dina Williams, educadora matemática

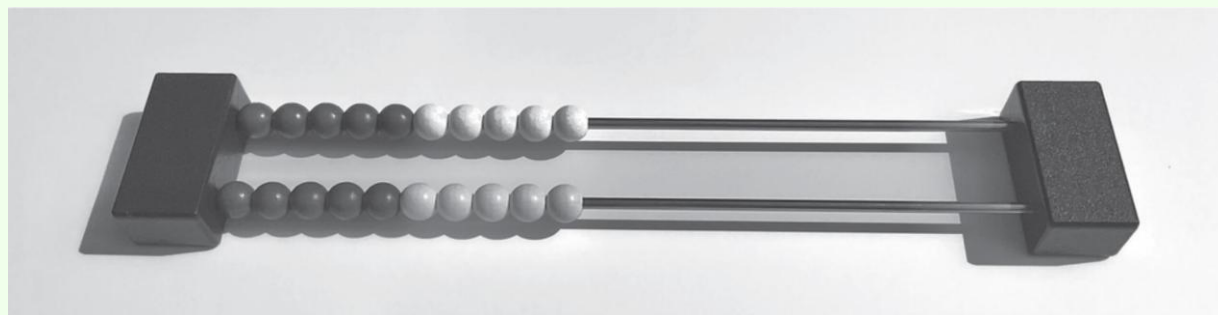
Dina, que falleció trágicamente en 2021, era una leyenda en la comunidad educativa de matemáticas de California por su compromiso con la equidad matemática, su ingenio y sus canciones matemáticas que utilizaba para llamar al orden en clase (o en las sesiones de desarrollo profesional). Dina decidió volver a una escuela con mayoría de alumnos negros y con pocos recursos, con la esperanza de aportar su gran experiencia. El compromiso de Dina con la equidad se centraba en proporcionar a los alumnos negros y latinos acceso a las matemáticas para que se sintieran empoderados como pensadores matemáticos. Su aula tenía esta hermosa cualidad. Era firme, pero cálida con los alumnos, y tenía una habilidad especial para facilitar el cuestionamiento matemático riguroso de los alumnos de segundo grado.

Ese día en particular, Dina comenzó con una cadena numérica utilizando un rekenrek.



Guía de prácticas de enseñanza en línea [grs.ly/I7f7rwq](https://www.youtube.com/watch?v=I7f7rwq)

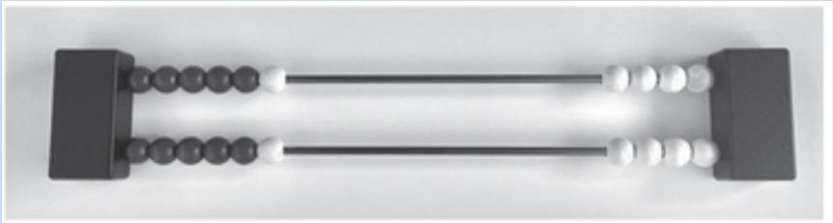
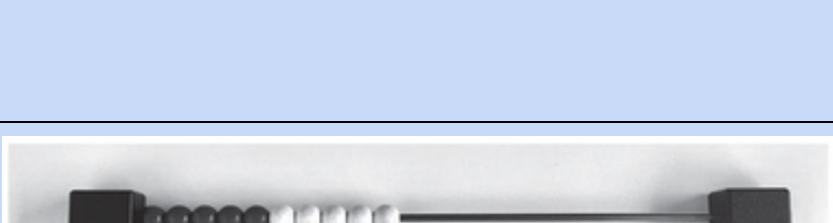
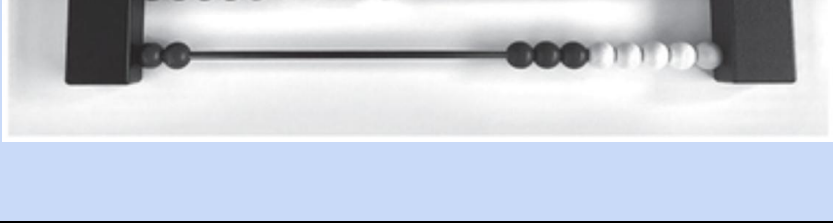
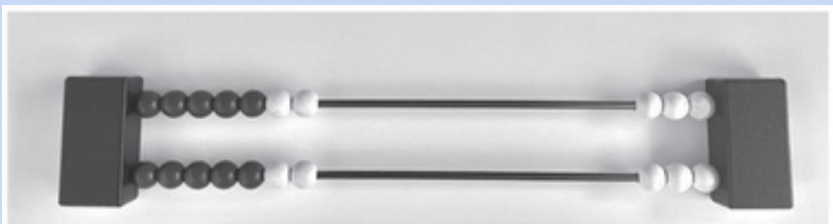
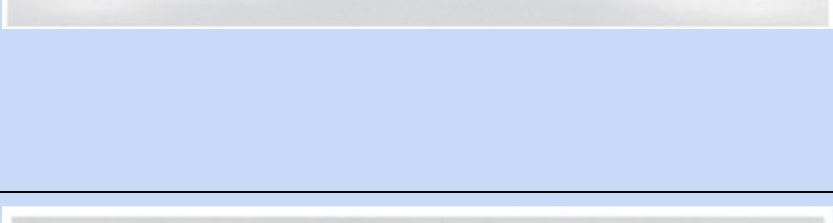

Reunió a los alumnos en la alfombra. Antes de empezar, le pregunté a Dina si le parecía bien que les hiciera una pregunta a los alumnos. Ella asintió con la cabeza. Como no estaba segura de cuánto sabían sobre los rekenreks, primero les pregunté: «¿Qué observáis en esta herramienta?».

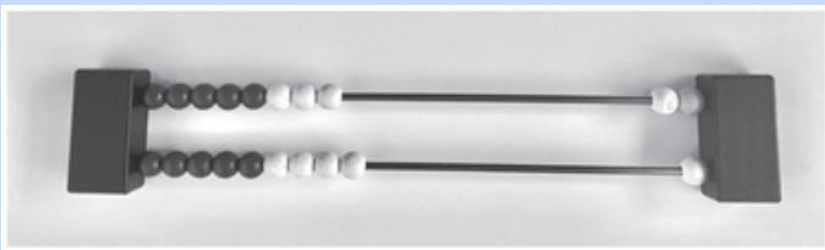


Inmediatamente, un niño levantó la mano y, cuando le di la palabra, nos dijo: «¡Mueves las cosas y luego dices cuántas hay!». ¡Era evidente que ya lo había hecho antes! Otros alumnos se dieron cuenta de que había cuentas rojas y blancas, que había 5 y 5 y 5 y 5, es decir, 20 cuentas en total. Otro se fijó en que había 10 en la parte superior y 10 en la inferior.

Entonces, Dina comenzó su cadena numérica. Primero colocó todas las cuentas en el lado derecho. Para cada problema, deslizó las cuentas hacia la izquierda y preguntó a los alumnos: «¿Cuántas veis? ¿Cómo lo has visto?». Cuando tenían una respuesta, los alumnos se la mostraban a Dina levantando el pulgar. Mientras le describían lo que veían, ella utilizaba las cuentas para mostrar los grupos que habían utilizado. A continuación, escribía ecuaciones para representar también su razonamiento. **La tabla 9.1** muestra su secuencia de problemas.

Lo que Dina mostró en el rekenrek	Estrategias seleccionadas de los alumnos	Lo que escribió en la pizarra
-----------------------------------	--	-------------------------------

	<p>«Vi 5 rojas y 1 blanca, así que 6, y otra vez, así que 6 más 6».</p>	<p>$5 + 1 = 6$, $5 + 1 = 6$ $6 + 6 = 12$</p>
	<p>«Vi 10 cuentas rojas y luego 2, así que 12».</p>	<p>$10 + 2 = 12$</p>
	<p>«Vi 10 en la parte superior y luego 2».</p> <p>«Igual que el anterior, pero el 10 es diferente».</p>	<p>$10 + 2 = 12$</p>
	<p>«Vi un 5 y un 2, que suman 7, dos veces. Sé las tablas del 7, así que $7 + 7 = 14$».</p>	<p>$5 + 2 = 7$ $7 + 7 = 14$ $10 + 4 = 14$</p>
	<p>«Vi un 10 en rojos y un 4 en blancos».</p>	<p>«Igual que el anterior, pero con una cuenta menos».</p>
	<p>«Pensé en $6 + 6$, pero 1 más».</p>	<p>$(7 + 7) - 1 = 13$ $(6 + 6) + 1 = 13$</p>



«Vi que casi había un 10 en la parte inferior, así que cogí una cuenta de la parte superior y la puse en la parte inferior. Eso hizo 17».

$$8 + 9 = 7$$

$$+ 10 = 17$$

$$(8 + 8) + 1 = 17$$

$$(9 + 9) - 1 = 17$$

«Vi $8 + 8$ y añadí 1».

«Pensé en $9 + 9$ y quité 1».

Piénsalo

¿Qué estrategias matemáticas se han diseñado en esta cadena numérica para ayudar a los niños a practicar?

Para esta secuencia numérica, Dina tenía varios objetivos relacionados con su trabajo continuo sobre la suma y la resta por debajo de 20. Su elección de números animaba a los alumnos a pensar en los dobles, que son especialmente interesantes en el rekenrek, ya que son muy visuales. También trabajaba para que vieran y trabajaran con flexibilidad con grupos de cinco y diez. Este último problema es una magnífica oportunidad para utilizar dobles más o menos uno, o para hacer un 10 moviendo una cuenta del 8 al 9.

Después de la cadena numérica del rekenrek, Dina reunió a sus alumnos de segundo grado en la alfombra y les habló de un problema con el que necesitaba ayuda. Dina estaba comenzando una nueva unidad de matemáticas basada en Measuring for the Art Show (2007), diseñada por Cathy Fosnot en su serie New Perspectives for Learning (2020). Dina llamó primero la atención de los alumnos sobre lo que ella llamaba un «tablón de anuncios triste» en la parte trasera del aula, totalmente vacío. Algunos alumnos le habían dicho que realmente necesitaba colgar algunos trabajos de los alumnos. Les dijo que le habían dado papeles de colores de diferentes tamaños que quería utilizar para exponer sus trabajos artísticos, pero que no sabía exactamente cuánto medían los trozos de papel y cuántos cabrían. Les pidió ayuda para medir los papeles. Sacó una pila de papeles, cada uno de un color diferente y con medidas distintas. Los papeles azules tenían exactamente la longitud de 10 cubos de conexión por 14 cubos de conexión. Otro papel, morado, tenía la longitud de 30 por 44 cubos de conexión. La clase se mostró entusiasmada por ayudar y pronto se pusieron a trabajar por parejas en diferentes partes del aula. Dina había dado a cada pareja de alumnos una bolsa con cierre hermético con dos colores de cubos de conexión.

Mientras Dina y yo recorríamos el aula, observamos a los alumnos mientras medían.

Queríamos asegurarnos de que entendían dónde empezar a medir, colocando la regla en el borde. Uno de sus objetivos matemáticos era desarrollar la comprensión espacial de la recta numérica por parte de los alumnos, por lo que prestó mucha atención a dónde colocaban el cero. Si veía que los alumnos no tenían cuidado al alinear el borde, Dina se sentaba con la pareja y hablaba con ellos hasta estar segura de que no solo eran capaces de medir, sino que también entendían exactamente por qué la medición dependía de ello.

Entonces, ¿por qué no les dio una regla? Porque lo que Dina quería era que sus alumnos crearan sus propias reglas. Al principio, los alumnos utilizaban los colores de las varillas de medir de forma aleatoria. Sin embargo, a los 15 minutos, una pareja de alumnos hizo una varilla de medir codificada por colores de dos en dos. Dina detuvo la clase y destacó esta regla, que casualmente había sido creada por un alumno con dislexia, al que llamaremos Kamir. Le pidió a Kamir que explicara por qué habían creado su regla con este patrón repetitivo (véase la figura 9.2). Kamir le dijo a la clase que los grupos de dos facilitaban el conteo. Dina se preguntó en voz alta si habría otros números que pudieran ser útiles.

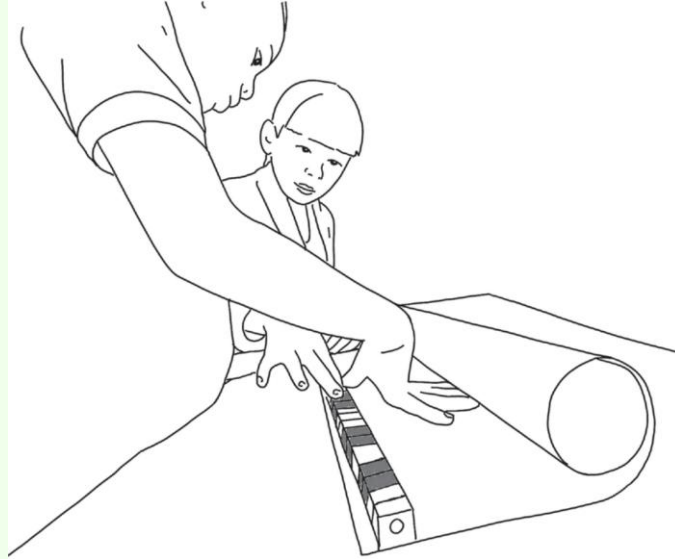


Figura 9.2 • Kamir y su compañero midiendo el papel morado

Cuando los alumnos volvieron al trabajo, observé cómo otra pareja formada por un niño y una niña empezaba a planificar la elaboración de una regla con grupos de cinco (**Figura 9.3**). Otros empezaron a utilizar grupos de diez. Al final de la primera sesión, todos los grupos habían rehecho sus reglas con grupos de 2, 5 o 10. Dina terminó el primer día mostrando estas diferentes configuraciones y manteniendo una conversación sobre las longitudes que habían encontrado los alumnos.



Figura 9.3 • Alumnos midiendo en grupos de 5

Hizo las siguientes preguntas: ¿Cuál era la longitud del papel azul? ¿Todos encontramos la misma cantidad? ¿Incluso si nuestras reglas eran diferentes? La conversación se centró en la equivalencia y en asegurarse de que todos midieran de la misma manera.

Al día siguiente, los alumnos terminaron de medir todos los papeles y comprobaron sus mediciones con otros alumnos. Dina terminó el día reuniendo a los alumnos. Les llamó la atención sobre los cubos conectados que había pegado en la pizarra, utilizando grupos de 5 (**Figura 9.4**).

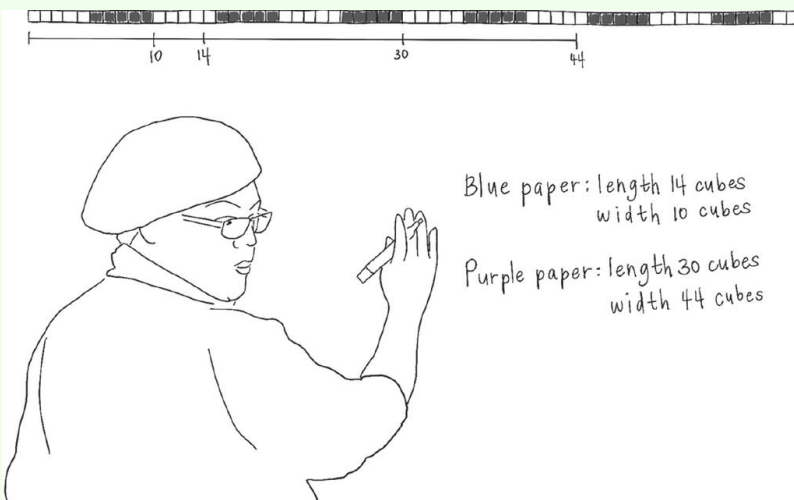


Figura 9.4 • Dina conecta las medidas con la línea de cubos conectados

A medida que los alumnos compartían sus hallazgos para cada hoja de papel que medían, Dina anotaba cada medida en la pizarra (Figura 9.4). Dina ralentizaba el debate cada vez que había un desacuerdo sobre la medida de un papel y pedía a los alumnos que no estaban de acuerdo que volvieran a medir utilizando sus cubos conectados delante de toda la clase. Dina estaba creando cuidadosamente un mapa para los alumnos entre la recta numérica de los cubos conectores y lo que se denomina una «recta numérica abierta», en la que no todas las

unidades están marcadas. La recta numérica abierta es el modelo matemático que su secuencia de lecciones estaba diseñada para desarrollar en los alumnos. En este punto, Dina había creado conjuntamente con sus alumnos una recta numérica que representaba cuidadosamente el espacio en función de la magnitud.

Hasta ese momento, nos sentíamos seguros con los alumnos. Parecían haber desarrollado en dos días una comprensión de la recta numérica como espacio lineal. Nuestras siguientes lecciones estaban diseñadas para desarrollar aún más la comprensión de los alumnos sobre las rectas numéricas a través de un juego. Tomamos un juego de la unidad (el juego Jump Jump) en el que los alumnos saltan con una rana de plástico en saltos de diez y uno alrededor de una recta numérica. Modificamos el juego para que fuera una recta numérica larga de 100, ya que nos interesaba especialmente la concepción que tenían los alumnos de la recta numérica. Laminamos las tablas y les dimos a los alumnos rotuladores para pizarra blanca para que pudieran marcar la tabla. Esperábamos que eso hiciera más visible su forma de pensar sobre dónde estaban los números. Nuestro trabajo en esta parte de la secuencia consistía en descontextualizar la recta numérica del contexto específico de la medición.

Al día siguiente, Dina hizo otra cadena numérica con sus alumnos, pero esta vez utilizando una recta numérica. La secuencia de problemas de la cadena estaba diseñada para conectar con los números que los alumnos habían medido en los papeles de colores y representado en la pizarra. Su intención era ayudar a los alumnos a conectar su comprensión creciente de la recta numérica con las estrategias de suma. Su cadena numérica era la siguiente:

Cadena numérica:

$$26 + 10$$

$$26 + 12$$

$$26 + 22$$

$$44 + 30$$

Pruébal

Antes de aprender cómo resolvieron los alumnos estos problemas, piensa en cómo tú o tus alumnos podrían resolverlos utilizando el cálculo mental.

Reunió a los alumnos en la alfombra, sin papel ni lápiz a la vista, y les recordó las expectativas de la cadena numérica: (a) Levantad el pulgar cuando tengáis una respuesta y (b) no interrumpáis el razonamiento de los demás gritando. Dina escribió el primer problema en la pizarra, lo leyó en voz alta y luego esperó. Los alumnos le indicaron que estaban listos con la respuesta levantando el pulgar en silencio. Cuando todos los alumnos levantaron el pulgar, llamó a una alumna que sumó 10 y dijo que sabía que 10 más que 26 era 36. Dina lo representó con un gran salto de 10 en una recta numérica justo debajo de su línea de cubos conectados. La figura 9.5 muestra la pizarra cuando Dina terminó la cadena.

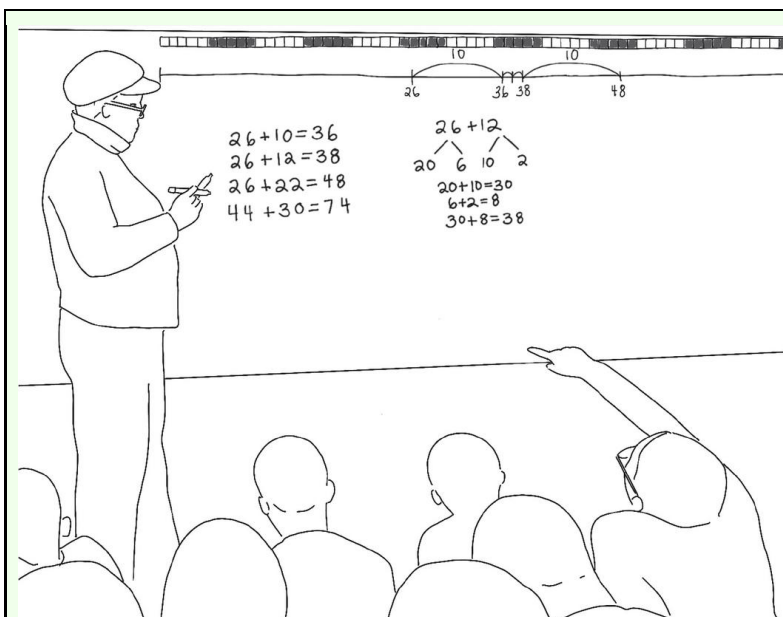


Figura 9.5 • Cadena numérica completada por Dina

Dina planteó el siguiente problema, $26 + 12$, y volvió a esperar hasta que pudo ver a la mayoría de los alumnos con el pulgar levantado, listos para compartir. El primer alumno en compartir había utilizado una estrategia de descomposición por valor posicional, dividiendo 26 en 20 y 6, y 12 en 10 y 2. A continuación, el alumno sumó las decenas en su cabeza, luego las unidades y, por último, las combinó.

A continuación, Dina preguntó si alguien lo había resuelto utilizando la recta numérica y señaló la línea de cubos conectados en la parte superior de la pizarra. Un alumno compartió que acababa de sumar dos más a 36. Dina lo añadió al problema anterior. Otro alumno comentó que era una buena estrategia, más fácil que descomponer el número. Los demás alumnos asintieron. Dina señaló que le encantaba que utilizaran patrones en los problemas para encontrar atajos.

El siguiente problema era $26 + 22$. Los alumnos parecían emocionados por volver a utilizar la recta numérica para este problema. «Es solo otra decena», exclamó un alumno, y Dina sonrió y le dio la palabra. El alumno quería usar la recta numérica abierta en la parte superior de la pizarra, añadiendo solo una decena más, ya que el problema añadía solo una decena más. Dina volvió a representar cuidadosamente esa estrategia en la parte superior de la pizarra, asegurándose de alinear su recta numérica abierta con los cubos conectados de arriba. Otro alumno compartió una estrategia de descomposición, que Dina también representó.

El problema final era $44 + 30$. Este problema no estaba relacionado con la serie de problemas anteriores, que comenzaban todos con el número 26. En cambio, este problema final empuja a los alumnos a generalizar una estrategia a un nuevo conjunto de números. Dina planteó el problema y dio más tiempo a los alumnos para pensar. Sintiendo la intensidad burbujeante de los alumnos que querían compartir, Dina les pidió que primero se giraran hacia un compañero y compartieran su estrategia. En toda la sala se produjo un gran ruido cuando las parejas comenzaron a hablar de sus estrategias, con los dedos apuntando a la pizarra. Dina se paseó por la zona de reunión, escuchando las estrategias de los alumnos y

decidiendo cuáles quería representar.


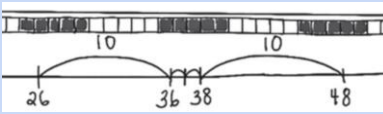

Para este último problema, Dina llamó a una alumna, Luisa, que había utilizado la recta numérica. La alumna dijo que «empezó en 44 y luego dio un salto de 10». Dina inmediatamente comenzó a dibujar una nueva recta numérica debajo de los problemas, comenzando en 44 y luego con un salto de 10. Dina preguntó: «¿Y dónde estabas entonces?». La niña respondió: «54». Dina marcó 54 en la recta numérica. Luisa le explicó a Dina el resto de su estrategia, incluyendo el nombre de cada salto de diez. Claramente, Luisa había estado utilizando la recta numérica como herramienta mental mientras pensaba en el problema. Otro alumno compartió una estrategia de división para el mismo problema, y discutieron brevemente las conexiones entre las estrategias. Dina y yo intercambiamos una mirada emocionada: el razonamiento de Luisa era exactamente lo que Dina había estado diseñando. Quería que sus alumnos no solo entendieran la recta numérica, sino que también la utilizaran como herramienta para pensar matemáticamente. ●

DESARROLLO DEL MODELO MATEMÁTICO DE LA RETAJA NUMÉRICA ABIERTA

Tanto Dina como yo conocimos, a través del trabajo de Math in the City, la educación matemática realista (RME), una tradición de investigación educativa matemática y diseño curricular que comenzó con el trabajo de Hans Freudenthal (1991) como matemático en los Países Bajos. Un elemento fundamental de la RME es que todos los alumnos deben tener experiencia en «matematizar sus mundos vividos» (Freudenthal, 1991). Todos los niños tienen derecho a comprender las matemáticas y a utilizarlas para comprender sus mundos. Dina creía en esto con pasión. Dina era una firme defensora de aumentar las oportunidades para que los estudiantes negros y latinos participaran en matemáticas significativas. Nuestra colaboración surgió de nuestro deseo de apoyar mejor a los estudiantes de color con discapacidades para que matematicaran sus mundos.

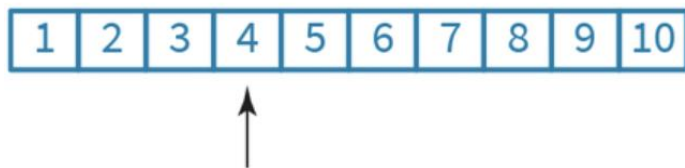
Todos los niños tienen derecho a comprender las matemáticas y a utilizarlas para comprender sus mundos.

Una segunda idea clave de la RME es cómo diseñar secuencias de aprendizaje que ayuden a los alumnos a comprender en profundidad los modelos matemáticos (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). El término «modelo matemático» se reserva para unos pocos modelos visuales críticos que son muy importantes en matemáticas: rectas numéricas, matrices y tablas de proporciones, por ejemplo. La secuencia para desarrollar un modelo comienza con el alumno interactuando con el modelo de manera informal en un contexto. En este caso, los alumnos comienzan utilizando cubos conectables para medir papel, un contexto de la vida real. El profesor conecta explícitamente el modelo informal con el modelo formal. En este caso, el modelo informal era la regla de medir con cubos conectables. El modelo formal era la recta numérica que Dina dibujó en la pizarra. Por último, una vez proporcionado el modelo matemático, se pidió a los alumnos que pensarán en problemas matemáticos que pudieran resolverse con él. Aquí, Dina pidió a los alumnos que resolvieran problemas de suma mentalmente, mientras seguían utilizando los cubos conectables para sugerir su uso. Dina utilizó deliberadamente la recta numérica para representar las estrategias de los alumnos, y pudimos ver una progresión dentro de la cadena numérica de los alumnos que utilizaban la recta numérica para pensar. El RME, por lo tanto, ofrece una visión específica y bien documentada de cómo ayudar a los alumnos a comprender las representaciones matemáticas más importantes (**Tabla 9.2**).

<p>Los alumnos interactúan con un modelo en un contexto de la vida real, creando un modelo informal.</p>	<p>El profesor establece conexiones entre el modelo informal y el modelo formal.</p>	<p>Los alumnos comienzan a resolver problemas utilizando el modelo como «herramienta para pensar».</p>
<p>Se pidió a los alumnos que midieran papeles utilizando reglas hechas con cubos conectados, que ellos mismos convirtieron en rectas numéricas. Diseñaron sus propias rectas numéricas, basándose en cualquier número que les ayudara a contar.</p>	<p>Dina recreó una regla y la pegó a la pizarra. A continuación, comenzó a dibujar rectas numéricas que se correspondían con las cantidades de la regla. Empezó a utilizar el modelo formal (la recta numérica abierta) para representar las estrategias de los alumnos.</p>	<p>Después de esta investigación, los juegos y las cadenas numéricas, los alumnos comenzaron a pensar con la recta numérica abierta. La utilizaron mentalmente en cadenas numéricas y la utilizaron como modelo para resolver problemas en trabajos escritos.</p>
		

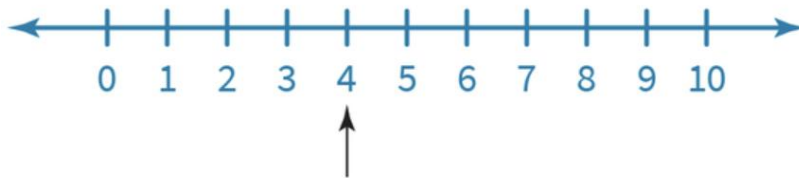
DESARROLLO DE LA RETAJA NUMÉRICA

La recta numérica es un modelo matemático fundamental que los alumnos utilizan desde el jardín de infancia hasta el cálculo. A muchos alumnos simplemente se les da una recta numérica para que la utilicen sin explicarles cómo funciona como modelo. Pero las rectas numéricas pueden resultar confusas, especialmente para algunos alumnos con discapacidades (Geary et al., 2008). Algunas rectas numéricas, especialmente en los primeros cursos de primaria, tienen este aspecto:



Si le preguntas a un estudiante dónde está el 4 en esta recta numérica, señalará el 4 completo, lo cual tiene sentido.

Pero, ¿qué pasa con esta recta numérica, en la que solo están marcados los números?
¿Dónde está ahora el 4?



¿Ve dónde esto podría confundir a un niño? El cuatro es ahora la medida completa, todo el espacio desde la marca del cero hasta la marca del 4. La recta numérica n.º 2 es una recta numérica cerrada, en la que están marcadas todas las iteraciones. RME también tiene otro tipo de recta numérica, en la que solo están marcados los números que se utilizan, una recta



numérica abierta:

USAR LA RETAJA NUMÉRICA COMO HERRAMIENTA PARA PENSAR

El objetivo final de Dina no es solo desarrollar la comprensión de la recta numérica, sino también aprovechar esa comprensión en las estrategias de los alumnos para la suma y la resta. La recta numérica abierta es un modelo poderoso para estrategias como dar saltos de diez y múltiplos de diez, útiles tanto para la suma como para la resta.

Si se da a los alumnos muchas oportunidades para comprender situaciones (problemas o tareas) que requieren sumas y restas, y se les proporcionan experiencias para que puedan comprender el valor posicional y el sentido numérico con números cada vez más grandes, los alumnos desarrollarán estrategias, a veces denominadas «algoritmos inventados», para la suma y la resta de varios dígitos. Tenemos muchas pruebas de que los alumnos desarrollan estas estrategias sin que se les enseñe (Carpenter et al., 2015), incluidos los alumnos con discapacidades. Los alumnos con discapacidades pueden desarrollar estas estrategias, al igual que los demás alumnos. Por ejemplo, los alumnos con dificultades matemáticas utilizaban la estrategia de sumar para restar cuando los números tenían sentido para hacerlo, un hallazgo que se repite en múltiples proyectos de investigación, incluso cuando los alumnos (a) tenían un bajo rendimiento en matemáticas y (b) no se les había enseñado directamente esta estrategia (Peters et al., 2014; Van Der Auwera et al., 2022).

Los alumnos de Dina estaban inventando en ese momento múltiples estrategias para la suma. El hecho de que los niños inventen naturalmente todas estas estrategias (y yo las he visto todas en mi trabajo como profesora) no significa que todos los alumnos de su clase tengan que saber cómo aplicar cada una de ellas. Así es como algunos libros de texto parecen haber interpretado la investigación que sustenta los estándares comunes. Algunos enfoques obligan a los alumnos a utilizar todas estas estrategias, enseñándoles cada una de ellas directamente y pidiéndoles que las practiquen. Esto no es una buena idea, especialmente para los alumnos que necesitan más tiempo para comprender una estrategia y/o pueden olvidarla. Los alumnos deben estar expuestos a múltiples estrategias (pero no es necesario que estén expuestos a todas ellas) si los alumnos de la clase las están utilizando. Su objetivo, especialmente en el caso de los alumnos que necesitan más tiempo para construir y recordar estrategias, es ayudar a todos los alumnos a desarrollar algunas estrategias y asegurarse de que dominen aquellas que les funcionan. ¡Deje que sus alumnos hagan lo que les resulte más lógico! ¡No los obligue!

(Para más información, consulte «**Desglosar una idea básica: estrategias para la suma y la resta de varios dígitos**» en la página 156).

Su objetivo, especialmente en el caso de los alumnos que necesitan más tiempo para elaborar y recordar estrategias, es ayudar a todos los alumnos a desarrollar algunas estrategias y asegurarse de que dominen aquellas que les resulten más útiles.

APOYAR EL DESARROLLO DE LA SUMAS Y RESTAS TEMPRANAS

Quiero volver a otra forma en la que esta lección ayudó a los alumnos de Dina. Dina solía comenzar su clase con una rutina de sentido numérico, como la cadena numérica rekenrek. Los rekenreks se crearon en los Países Bajos en la década de 1990 como una modificación del ábaco para ayudar a los alumnos a trabajar con flexibilidad con grupos de 5 y 10. Un estudio realizado con grupos aleatorios descubrió que el uso del rekenrek era significativamente más eficaz que la misma instrucción con un marco de diez para los alumnos con dificultades de aprendizaje (Tournaki et al., 2008). ¿Por qué es tan útil el rekenrek? El rekenrek es útil para desarrollar las estrategias de duplicación, así como para ayudar a los estudiantes a visualizar la compensación, el concepto que hay detrás de la formación de decenas. Para el problema $8 + 9$, por ejemplo, los estudiantes pueden pensar en él como un doble ($8 + 8$) más uno, o formar una decena pasando uno del 8 al 9. Esa estrategia de formar decenas se hace más concreta para los estudiantes cuando se deslizan las cuentas. Para obtener más información sobre las estrategias de los alumnos, consulte «Desglosar una idea fundamental: fluidez con la suma y la resta por debajo de 20» en la página 155.

Dina consideraba el rekenrek un modelo importante para la suma y la resta tempranas, pero también una forma de apoyar las concepciones lineales de los números. Estos grupos de 5 y 10 fueron precursores de su regla de medir más larga hecha de cubos conectados, otra forma de apoyar la comprensión de los números como espacio lineal.

MODELOS MATEMÁTICOS IMPORTANTES

La recta numérica no es el único modelo matemático importante para los estudiantes. Otro modelo particularmente útil es la matriz, que es muy eficaz para desarrollar la comprensión conceptual de la multiplicación. Las matrices también ayudan a los estudiantes a comprender el área, que se extiende a conceptos de álgebra y geometría. Se puede seguir esta misma trayectoria de diseño haciendo que los estudiantes exploren primero las matrices en el mundo real, utilizando las matrices para representar su pensamiento, y luego, eventualmente, los estudiantes pueden pensar con las matrices como una herramienta mental. Otros modelos útiles son la tabla de proporciones y la doble recta numérica, que pueden representar proporciones y variables, que exploramos en el capítulo 13.

La enseñanza de Dina se diseñó para desarrollar modelos matemáticos importantes. Utilizó diversas pedagogías matemáticas para apoyar este desarrollo. El trabajo de diseño de reglas de medir a través de una investigación fue una indagación guiada. También proporcionó orientación estratégica a cada alumno para apoyarlos, siendo particularmente explícita sobre cómo medir. A medida que avanzaba la unidad, Dina utilizó cadenas numéricas, un ejemplo de desarrollo estratégico guiado. Las cadenas numéricas se estructuran cuidadosamente para apoyar el desarrollo de los alumnos, pero siempre les permiten tomar la iniciativa a la hora de compartir sus propias estrategias.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Cuál es el papel de una instrucción cuidadosamente secuenciada en matemáticas, como la forma en que Dina secuencia la instrucción en la recta numérica? ¿Cómo apoya eso el aprendizaje de los alumnos?
2. ¿Qué observó y qué le llamó la atención sobre la clase de Dina? ¿Qué más le gustaría saber sobre su trabajo y sus alumnos?
3. El diseño de este capítulo tiene como objetivo que los alumnos utilicen la recta numérica mientras piensan. ¿Ha visto a alumnos que tienen dificultades con la recta numérica? ¿Alumnos que la utilizan como herramienta para pensar? Según su experiencia, ¿qué ha funcionado para ayudar a los alumnos a comprender esta herramienta fundamental?

Participación	Representación	Acción estratégica
Dina creó una comunidad matemática de solucionadores de problemas en esta clase de segundo grado. Lo hizo combinando altas expectativas y calidez.	La secuencia de la lección de Dina trata sobre el desarrollo de una recta numérica, que es mucho más que un elemento visual. Puede convertirse en una herramienta para pensar si los alumnos logran interiorizarla. Esta unidad está diseñada para lograrlo, un tipo de multimodalidad específicamente matemática.	Dina proporcionó a los alumnos comentarios específicos sobre sus mediciones. Nos aseguramos de que todos los alumnos fueran capaces de utilizar la herramienta correctamente y, a continuación, comprobamos que estuvieran generalizando a la recta numérica.

Desglosar una idea central: fluidez con la suma y la resta por debajo de 20

A medida que los alumnos se alejan del modelado directo, comienzan a desarrollar estrategias para la suma y la resta. Los alumnos desarrollan fluidez con los problemas de suma y resta a través de tres fases (Bay-Williams y Kling, 2019).

Fase 1. Contar (con objetos o mentalmente)

Fase 2. Derivación (utilizando estrategias de razonamiento basadas en operaciones conocidas)

Fase 3. Dominio (produce respuestas de manera eficiente)

Los alumnos no aprenden todas las operaciones a la misma velocidad. En cambio, algunas operaciones (como las dobles) suelen aprenderse mucho antes que otras. Bay-Williams y Kling (2019) las denominaron «operaciones fundamentales». A continuación, los alumnos

aprenden las operaciones que son un poco más complicadas, las llamadas «operaciones derivadas». **La tabla 9.3** ofrece ejemplos de operaciones fundamentales y derivadas.

Hechos fundamentales	Estrategias de hechos derivados
Más y menos 0, 1 y 2 ($5 + 0$, $5 + 1$, $5 + 2$, etc.)	Casi dobles (usar un doble para resolver un problema que está cerca, como usar $6 + 6$ para resolver $6 + 7$)
Dobles ($5 + 5$, $6 + 6$, etc.)	Hacer 10 (crear un problema más fácil utilizando el 10, como cambiar $9 + 5$ a $10 + 4$ moviendo un uno)
Combinaciones hasta 10 ($3 + 7$, $8 + 2$, etc.)	Simular un 10 (convertir $8 + 5$ en $10 + 5$ y luego restar el 2 sobrante).
Sumar un número de un dígito a diez ($10 + 2$, $10 + 7$, etc.)	

Podemos ayudar a los alumnos a desarrollar el sentido numérico necesario para estas estrategias mediante problemas narrativos y otras actividades que desarrollen su sentido numérico y su capacidad de contar, como contar colecciones. También les ayudamos guiándoles hacia estrategias para las operaciones derivadas. Una vez que los alumnos comienzan a utilizar algunas estrategias de derivación, apoyamos su desarrollo dándoles muchas oportunidades para desarrollar estrategias, escuchar las estrategias de otros alumnos y hablar sobre sus propias estrategias. ¡Las cadenas numéricas y los juegos de Rekenrek son excelentes maneras de hacerlo!

Un error frecuente es apresurar a los alumnos en la fase 2: Derivación. No solo se necesita tiempo para que los alumnos desarrollen y practiquen estas estrategias, sino que también es aquí donde desarrollan el pensamiento sobre las operaciones y la equivalencia necesarios para las matemáticas futuras, especialmente el álgebra. Los alumnos que utilizan la estrategia «Hacer 10» y reflexionan profundamente sobre por qué $9 + 5 = 10 + 4$ están pensando en la equivalencia algebraica. Estas estrategias también son importantes cuando comienzan a desarrollar estrategias para la suma de varios dígitos, como utilizar la compensación para resolver $99 + 50$.

Desglosar una idea central: estrategias para la suma y la resta de varios dígitos

Las investigaciones han documentado que los estudiantes desarrollan múltiples estrategias para la suma y la resta de varios dígitos (Carpenter et al., 2015). Recomiendo dar a los estudiantes muchas oportunidades para desarrollar y discutir estas estrategias. Debemos asegurarnos de que cada niño tenga estrategias que le funcionen; no se debe obligar a los niños a utilizar estrategias que no tengan sentido para ellos. La tabla 9.4 ilustra algunas de las estrategias más comunes. Véase también **la tabla 9.5**.

Descripción de la estrategia	Ejemplo
------------------------------	---------

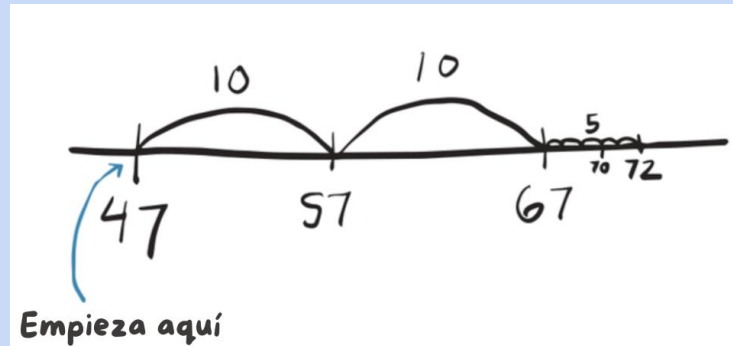
Descomposición por valor posicional/división

Los alumnos descomponen los números en unidades de valor posicional y luego combinan las unidades. Por lo general, trabajan primero con las partes más grandes.

$$\begin{array}{r} 47 + 25 \\ \begin{array}{l} \diagdown \quad \diagup \\ 40 \quad 7 \end{array} \quad \begin{array}{l} \diagdown \quad \diagup \\ 20 \quad 5 \end{array} \end{array}$$
$$\begin{array}{l} 40 + 20 = 60 \\ 7 + 5 = 12 \\ 60 + 12 = 72 \end{array}$$

Mantener un número entero y añadirle

Los alumnos comienzan con un número y luego añaden partes que les parecen lógicas, normalmente decenas y múltiplos de decenas, y luego unidades. La recta numérica es un modelo excelente para esta estrategia.



Compensación

Los alumnos juegan con los sumandos para facilitar la suma. Siempre que no pierdan ni añadan cantidad, ¡esto funciona!

$$\begin{array}{r} 47 + 25 \\ \hline + 3 \\ \hline 50 + 22 = 72 \end{array}$$

Toma 3 del 25 y dáselo al 47

Pruébalo

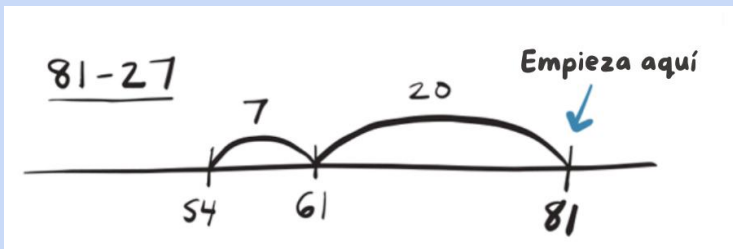
Intenta resolver estas estrategias para $39 + 42$

Descripción de la estrategia

Ejemplo

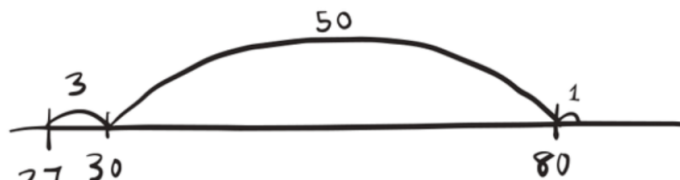
Mantener el minuendo intacto y eliminar

El minuendo es el número del que se está restando. Los alumnos mantienen ese número entero y eliminan grupos de números, normalmente decenas y múltiplos de decenas primero.



Sumar para restar

Los alumnos suelen preferir sumar en lugar de restar. En esta estrategia, los alumnos suelen sumar hasta obtener la diferencia.



Empieza aquí y suma hasta llegar a 81

$$3 + 50 + 1 = 54$$

Descomposición por valor posicional

Los alumnos descomponen los números en unidades de valor posicional y, a continuación, restan las unidades de las unidades del mismo tamaño y combinan las respuestas. Si se obtiene un número negativo, hay que seguir adelante. Funciona (una pregunta maravillosa para averiguar por qué).

$$\underline{81 - 27}$$

$$80 - 20 = 60$$

$$1 - 7 = -6$$

$$60 - 6 = 54$$

Diferencia constante

Esta es otra estrategia con la que se intenta facilitar un poco el problema. Si podemos cambiar el problema para que el número que estamos restando sea un múltiplo de diez, sumamos o restamos la misma cantidad para que la diferencia siga siendo la misma y luego lo resolvemos.



$$84 - 30 = 54$$

Pruébal

Intenta aplicar estas estrategias para $64 - 39$

Una vez más, no es necesario que todos los alumnos aprendan todas estas estrategias. Ayuda a los alumnos a desarrollar algunas estrategias y asegúrate de que dominen aquellas que les funcionan.

Más información:

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (2015). Las matemáticas de los niños: enseñanza guiada cognitivamente (2.^a ed.). Heinemann.

Fosnot, C. T. y Dolk, M. (2001). Jóvenes matemáticos en acción: Construyendo el sentido numérico, la suma y la resta. Heinemann.

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 9.5 • La cadena numérica completada por Dina

Las etiquetas debajo de la regla de medir muestran los números 26 y 36, con un arco que representa el salto de 10, y los números 38 y 48, con un arco que representa el salto de 10.

Los cálculos se presentan de la siguiente manera.

26 más 10 es igual a 36

26 más 12 es igual a 38.

26 más 22 es igual a 48.

44 más 30 es igual a 74.

El cálculo 26 más 12 se presenta de la siguiente manera.

26 se divide en 20 y 6.

12 se divide en 10 y 2.

20 más 10 es igual a 30.

6 más 2 es igual a 8.

30 más 8 es igual a 38.

Mantener un número entero y sumar

La suma es 47 más 25. Una recta numérica está marcada con el número 47. Un salto de 10 lleva el número a 57. Un segundo salto de 10 lleva el número a 67. Una serie de 5 pequeños saltos de 1 lleva el número a 72.

Sumar para restar

Un ejemplo de sumar para restar. La ecuación es 81 menos 27. Una recta numérica muestra un salto de 3 de 27 a 30 y un salto de 50 de 30 a 80. Una etiqueta señala el 27 y dice «empieza aquí y suma hasta llegar a 81». A continuación, se escribe la ecuación 3 más 50 más 1 es igual a 54.

CAPÍTULO 10 DISEÑO PARA LA FLUIDEZ DE LOS HECHOS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Acompañeme mientras imparto una intervención en grupos reducidos sobre la multiplicación

Hablaremos sobre el desarrollo de la multiplicación y el papel de la fluidez

Explorar el uso de juegos matemáticos para apoyar la fluidez en la suma y la resta

POCO DESPUÉS DE QUE LOS ESTUDIANTES pudieran volver a la escuela presencialmente en California en 2021, tras el levantamiento de algunas de las restricciones de la pandemia del coronavirus 2019 (COVID-19), comencé a trabajar con una escuela primaria para diseñar una intervención para los estudiantes que regresaban con aprendizajes pendientes. Decidimos que una necesidad importante de intervención era un grupo de alumnos de cuarto y quinto grado que necesitaban más apoyo con la multiplicación. La escuela en la que trabajaba era mayoritariamente latina, y más de la mitad de los alumnos eran multilingües. Casi todos los alumnos procedían de familias por debajo del umbral de la pobreza. Los alumnos de estos cursos tenían experiencias muy diversas con la escolarización durante la pandemia. Algunos alumnos contaban con mucho apoyo y asistían a todas las clases en línea. Otros alumnos no podían asistir o tenían muchas dificultades para aprender en línea, conectándose a las clases a través de la pantalla.

Nuestro equipo decidió crear un club de matemáticas extraescolar para los alumnos que necesitaban más apoyo en multiplicación. De los 18 alumnos que incluimos en el programa, varios no respondieron correctamente a ninguna pregunta (o solo a una) en nuestra evaluación inicial de multiplicación temprana. En nuestra primera sesión, me di cuenta de que dos de estos alumnos tampoco participaban. Quería saber más sobre estos alumnos para poder ayudarles. Aunque la mayor parte de la enseñanza de este programa la impartían estudiantes universitarios, decidí enseñar a estos dos alumnos en mi propio grupo reducido.

Antes de nuestra primera reunión, revisé minuciosamente lo que sabía sobre estos dos alumnos. Franco era un alumno de quinto grado, latino, multilingüe en español e inglés, y tenía un Programa de Educación Individualizada (IEP) para el autismo. Sus profesores lo describían como inconsistente en matemáticas. Pronto descubrí que Franco tenía un sentido del humor irónico. Había asistido a clases por Zoom el año anterior, pero sus profesores notaron que le costaba mucho más aprender a través de la pantalla. También me preguntaba por Franco y el lenguaje. Tenía la impresión de que no entendía completamente algunas de las preguntas que se le hacían, por lo que especulé que tal vez sabía bastante más de lo que nosotros creíamos.

Jeremy era un alumno de cuarto curso, latino, multilingüe y con un IEP por una discapacidad de aprendizaje en lectura: dislexia. Era un niño juguetón y simpático al que le encantaban los juegos y jugar en el recreo. Jeremy había asistido a menos de la mitad de las clases por Zoom el año anterior y ahora parecía necesitar mucha más intervención en matemáticas que

antes del cierre de las escuelas por la pandemia de COVID-19, cuando su trabajo en educación especial se centraba en la alfabetización. Me di cuenta de que Jeremy parecía estar contando en voz baja, pero sin usar los dedos. Tampoco quería dibujar, como hacían muchos alumnos cuando se atascaban. Pensé que tal vez podría darle bloques como material manipulativo.

Decidí que tanto Franco como Jeremy podrían beneficiarse del trabajo práctico con la multiplicación. Diseñé una intervención basada en estudios de intervención constructivista en grupos pequeños sobre el pensamiento multiplicativo utilizando torres de bloques para involucrar a los alumnos en el pensamiento multiplicativo temprano (Tzur et al., 2020). En este tipo de intervención en grupos pequeños, comenzamos por comprender lo que saben los alumnos, construyendo a través de tareas específicas diseñadas específicamente para ellos (Hunt y Ainsle, 2021).

En nuestra primera sesión, apilé cubos conectables sobre la mesa y les pregunté: «¿Podéis hacerme una torre de 3 cubos?». Inmediatamente escribí las palabras en la pizarra mientras preguntaba: «1 torre de 3 cubos». Mi petición, algo extraña, fue inmediatamente aceptada por ambos alumnos, y Jeremy primero hizo una pila de 4 y luego la corrigió. Dibujé una representación de la torre de 3 cubos que habían hecho. A continuación, les pregunté cuántos cubos eran y ambos respondieron «tres». Escribí «3» y dije «un grupo de 3 es tres» antes de escribir las palabras. Luego escribí $1 \times 3 = 3$, diciendo la ecuación de multiplicación en voz alta mientras escribía. Esta cuidadosa documentación de lo que estábamos haciendo era importante para conectar lo que estábamos haciendo con las exigencias simbólicas y lingüísticas de la tarea.

A continuación, les pregunté: «¿Podéis hacerme dos torres de tres?». Volví a escribirlo en la pizarra. Franco las hizo, y Jeremy también, pero luego las apilaron una encima de otra. Le pregunté qué torre había hecho y Jeremy me miró, desconcertado. Franco respondió: «Una torre de 6». Jeremy puso cara de extrañeza, luego contó y asintió con la cabeza. Les pregunté cuántos bloques había en 2 torres de 3 y ambos coincidieron en que 6. Escribí una ecuación y la leí en voz alta.

Nuestro último problema duplicaba el anterior, pidiéndoles que hicieran cuatro torres de 3 bloques. Jeremy hizo las torres y luego resolvió el total duplicando la respuesta anterior, ya que «3 más 3 es 6, por lo que 6 duplicado es 12, o 3 más 3 más 3 más 3». Mientras explicaba su razonamiento, Jeremy utilizó los bloques para modelar su pensamiento, moviéndolos a medida que explicaba su razonamiento (**Figura 10.1**). Pude ver que, con estas torres en sus manos, tenía acceso a un pensamiento estratégico sobre la multiplicación. Las torres respaldaban su razonamiento matemático y su capacidad para compartirlo con palabras.



Figura 10.1 • Jeremy mostrando su estrategia para cuatro torres de tres bloques

En una de las siguientes sesiones, hicimos la siguiente secuencia de construcción de torres:

2 torres de 5

4 torres de 5

6 torres de 5

La figura 10.2 muestra el tablero después de que termináramos. Esta secuencia provocó que ambos alumnos contaran saltando números en lugar de contar los objetos (debido a mi elección del 5, ideal para contar saltando números). También iniciaron una conversación sobre la relación entre el 5 y el 10, y Franco comenzó a trabajar con el 10, duplicando las torres para 4×5 . También les pedí que predijeran el problema de multiplicación antes de escribirlo. Ambos fueron capaces de hacerlo.

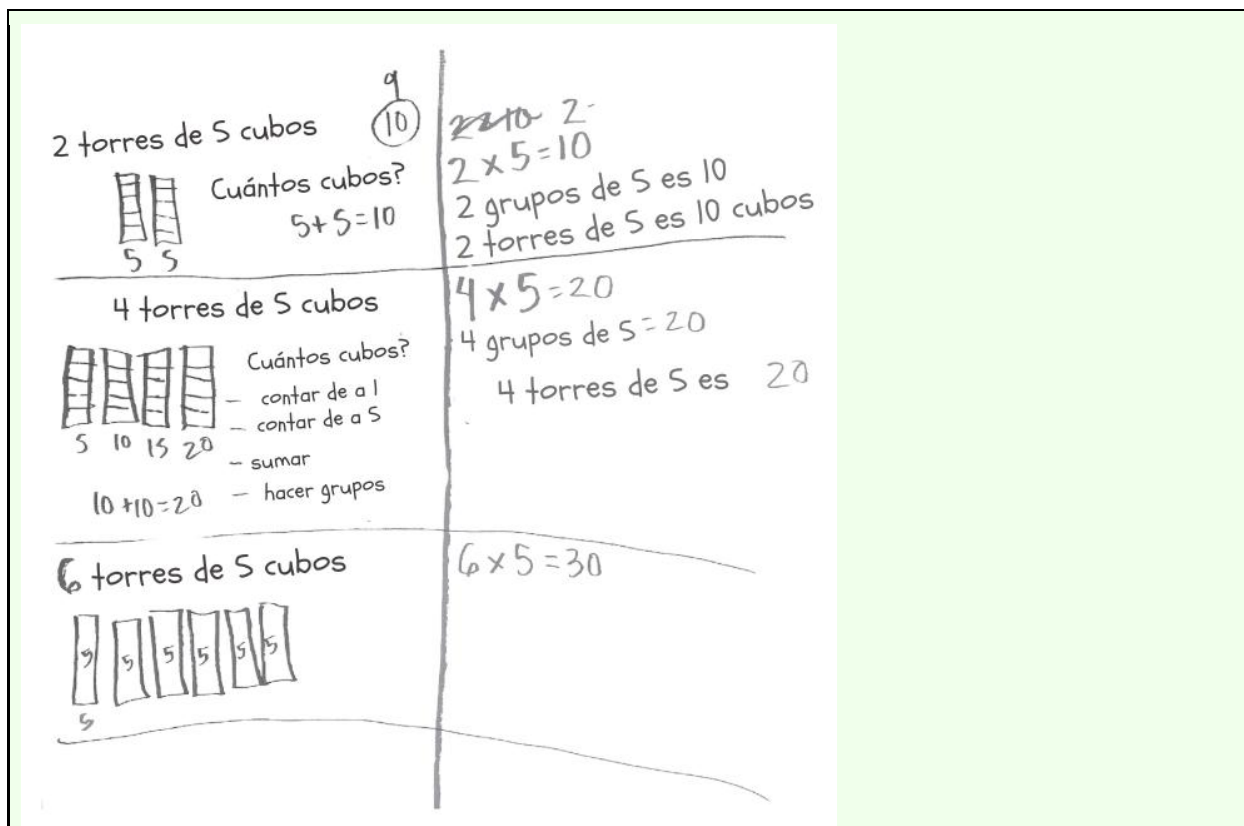


Figura 10.2 • Pizarra que muestra las estrategias de Franco y Jeremy para la multiplicación

Durante todo el proceso, escribí en voz alta el lenguaje que utilizaba. Acompañé el lenguaje con imágenes de las torres y las ecuaciones. También escribí las estrategias que utilizaban para la multiplicación: «Contar de 1 en 1, contar de 5 en 5, sumar, formar grupos». Observamos y nombramos las estrategias que utilizaban cada vez.

Ambos niños se volvieron bastante hábiles en la creación y denominación de torres. Ambos estudiantes pasaron del modelado directo, o contar cada objeto, a contar de dos en dos y duplicar. Sentí que Jeremy realmente aprendió al construir estas torres por sí mismo. No era realmente un niño al que le gustara dibujar, pero era un constructor al que le encantaba hacer cosas. En cuanto a Franco, la solidez de los bloques, junto con la cuidadosa documentación del lenguaje, le permitieron sentirse seguro con las palabras que se utilizaban. Vi que comprendía mucho más cuando sostenía las torres en sus manos que en cualquier otro contexto. Podía ver cómo prestaba mucha atención mientras escribía frases como «4 grupos de 5».


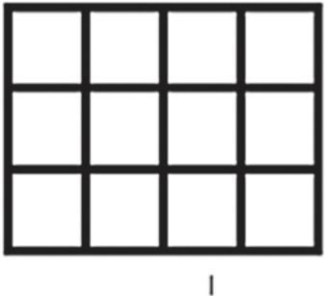
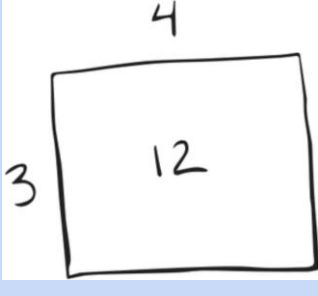
Después de esta sesión, saqué a Franco y Jeremy de mi grupo y los pasé a uno dirigido por un investigador universitario. Sentí que tenían la base necesaria para participar ahora en el trabajo de los demás estudiantes. Utilizamos el plan de estudios Building Fact Fluency para la multiplicación y la división (Fletcher y Zager, 2021), un recurso maravilloso que recorre sistemáticamente los factores de multiplicación a través de una secuencia de tareas de tres actos, cadenas numéricas (llamadas «conversaciones numéricas»), juegos y problemas narrativos. Al igual que el trabajo de la educación matemática realista (RME) que desarrolla la recta numérica en el capítulo 9, estas lecciones hacen un uso intencionado de elementos visuales que apoyan y amplían las estrategias matemáticas de los alumnos en la

multiplicación.

Tanto Jeremy como Franco mejoraron mucho su comprensión de la multiplicación.¹ Jeremy utilizó la idea de las torres en su nuevo grupo pequeño, compartiendo, por ejemplo, que había resuelto un problema con decenas pensando en torres. Al final del año, después de un total de 15 sesiones, Jeremy utilizaba una combinación de estrategias de conteo por saltos y de hechos derivados, basándose en los hechos que ya conocía. Seguía utilizando los dedos o bloques para contar por saltos si el factor era difícil, como contar por saltos de cuatro. Franco progresó aún más, demostrando su comprensión de la multiplicación de varios dígitos. En primavera, Franco comenzó a utilizar de forma sistemática un hecho conocido y a partir de él, por ejemplo, resolviendo 6×6 sabiendo 5×6 y añadiendo luego un grupo más de 6.

1 Estos datos se analizaron con la ayuda de mi colega Tomy Nguyen.

También desarrollaron una comprensión más sofisticada del modelo de matriz con el tiempo, ya que comenzamos con una matriz de bloques y pasamos a una matriz cerrada. En primavera, ambos alumnos utilizaban matrices abiertas (**Tabla 10.1**).

Matriz de bloques	Matriz cerrada	Matriz abierta
<p>Los alumnos pueden empezar con las matrices construyéndolas con bloques o mirando fotos de matrices en la vida real. Esta imagen es de los bloques de Jeremy.</p> 	<p>En una matriz cerrada, se muestran todas las casillas, lo que permite a los alumnos contar si es necesario.</p> 	<p>Las líneas interiores ya no son necesarias, lo que resulta útil para números más grandes.</p> 

LA FLUIDEZ MATEMÁTICA SE DESARROLLA A TRAVÉS DEL PENSAMIENTO MULTIPLICATIVO

Elegimos la multiplicación para este grupo de intervención tras la pandemia de COVID-19 porque la multiplicación es una idea fundamental en matemáticas. La multiplicación y la división se basan en el pensamiento multiplicativo, un concepto bastante poderoso que consiste en pensar en y con grupos. Comprender la multiplicación es mucho más que memorizar las tablas de multiplicar. Dado que estos alumnos habían llegado a cuarto y quinto curso sin ser capaces de resolver problemas de multiplicación simples, realmente necesitaban una enseñanza adicional de apoyo para desarrollar su comprensión y fluidez con la multiplicación y la división.

Es curioso que a menudo hablemos de la fluidez en las tablas de multiplicar como si fuera algo fundamentalmente diferente al aprendizaje de la multiplicación por parte de los alumnos. En realidad, es solo el final de un proceso, un objetivo (**Figura 10.3**). La idea subyacente en la multiplicación es la idea de unificar, de trabajar con grupos como trabajamos con unidades. La unificación nos ayuda a comprender que diez unidades forman un diez, que 6 grupos de 5 son 30 y que $3x$ significa 3 grupos de x . Nuestro sistema numérico de base diez se basa en grupos de diez que se multiplican por diez a medida que avanzamos en los lugares, un sistema multiplicativo.

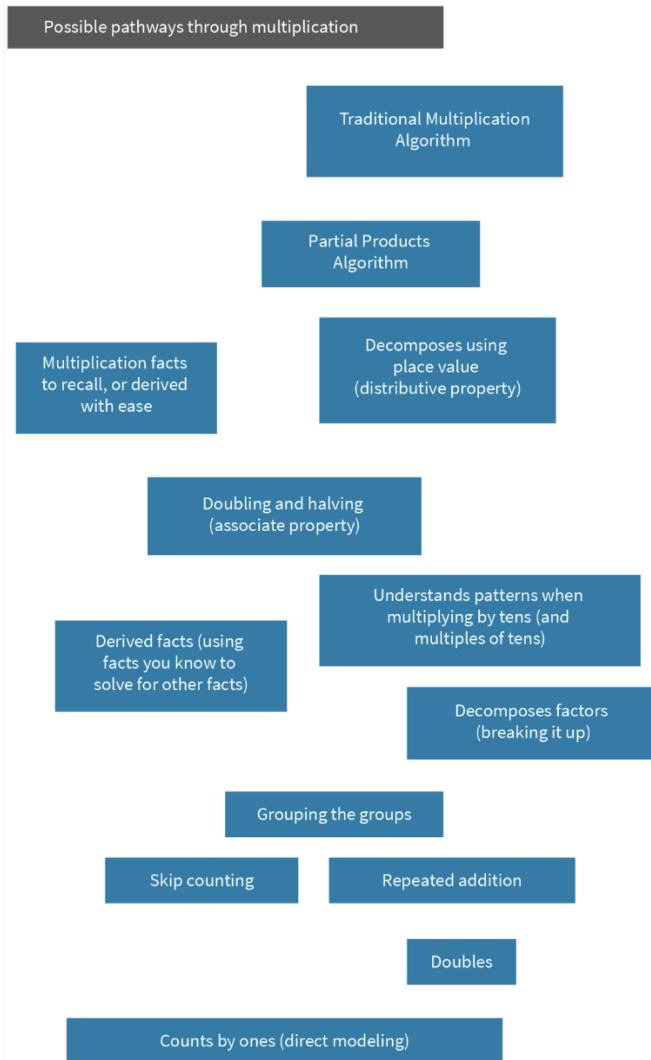


Figura 10.3 • Panorama de la multiplicación y la división

Para comprender la unificación, los alumnos deben desarrollar el pensamiento multiplicativo. El pensamiento aditivo consiste en juntar (y separar) cosas, mientras que el pensamiento multiplicativo consiste en juntar (y separar) grupos de cosas. Una dificultad es que siempre hay una proporción, dos cantidades que hay que comprender en relación.

Los alumnos aprenden primero la multiplicación a través de situaciones de modelado directo que requieren multiplicación y división (véase «Desglosar una idea fundamental: multiplicación y división tempranas con problemas narrativos» en la página 174). Mediante el modelado directo (representar/contar cada elemento), los alumnos muy pequeños pueden resolver este tipo de problemas. El siguiente paso es resolver problemas con estrategias más eficientes, como contar de dos en dos. Hay ciertos factores con los que a la mayoría de los alumnos les resulta mucho más fácil contar de dos en dos y, por lo tanto, trabajar (2, 5 y 10). Como puede ver, me aseguré de que nuestro trabajo inicial se realizara en grupos de 2, 5 o 10, lo que Bay-Williams y Kling (2019) denominaron «conceptos básicos» (para más información, véase «Desglosando una idea fundamental: fluidez con la multiplicación» en la página 176). Ayuda a los alumnos a tener los conceptos básicos de forma eficiente en su mente para poder utilizar los conceptos derivados. Un estudiante necesita saber las decenas para poder pensar en las unidades utilizando una estrategia de restar un grupo de 10. Sin embargo, al trabajar con estudiantes neurodiversos, nunca doy por sentado que una cosa siempre será lo primero.

Los alumnos comienzan entonces a desarrollar estrategias adicionales, también llamadas «operaciones derivadas». Cuando Jeremy resolvió 4×3 duplicando 2×3 , utilizó una estrategia de duplicación. Cuando Franco resolvió 6×6 utilizando una operación que conocía (6×5) y añadiendo otro grupo de 6, utilizó una estrategia que he oído llamar a los alumnos «dividir». Un error frecuente es apresurar a los alumnos en esta fase.

Cuando planificaba mis lecciones para Franco y Jeremy, no solo diseñaba para la fluidez. Estaba sentando las bases para la fluidez desarrollando simultáneamente sus conocimientos conceptuales (comprensión de las ideas fundamentales subyacentes) y procedimentales (comprensión de cómo resolver problemas). A veces oigo a los educadores separar los conocimientos conceptuales y procedimentales en matemáticas como si fueran completamente independientes. Parecen separados cuando definimos los conocimientos procedimentales como el conocimiento de un pequeño conjunto de procedimientos estandarizados, como el algoritmo de la multiplicación. Pero los conocimientos procedimentales en la literatura científica son simplemente saber cómo resolver un problema de manera eficiente, no hacerlo de una manera concreta.

En estas lecciones de multiplicación, Franco y Jeremy exploraban conceptos y estrategias simultáneamente. Esta idea está respaldada por investigaciones que han descubierto que los dos tipos de conocimientos se desarrollan al mismo tiempo (Rittle-Johnson, Schneider y Star, 2015). Cuando se les dieron a los estudiantes problemas de práctica cuidadosamente secuenciados en aritmética (similares a mis secuencias con las torres o en cadenas numéricas), los estudiantes desarrollaron tanto conocimiento conceptual como procedimental (estratégico) en comparación con cuando se utilizó una condición de control (Canobi, 2009). Especialmente cuando enseñamos operaciones matemáticas, cuando los alumnos desarrollan estrategias, también refuerzan su comprensión conceptual. Jeremy aprendió a contar saltando utilizando las torres (estrategia) a medida que aprendía a pensar multiplicativamente con grupos (concepto). ¡En realidad es extraño pensar en enseñarles por separado! En esta

intervención, utilicé el desarrollo estratégico guiado para ayudar a los alumnos a desarrollar nuevas estrategias en la multiplicación, así como juegos para proporcionar práctica.

Para este tipo de intervención es fundamental observar y nombrar las estrategias de los alumnos. Cuando Jeremy duplicó para resolver el problema, nombré la estrategia y la escribí en la pizarra. Cuando Franco utilizó un dato conocido para averiguar otro, llamé la atención sobre esa estrategia y decidimos un nombre para ella. **La figura 10.4** muestra un gráfico en papel de cuando dirigí un debate en grupo en el programa extraescolar sobre las estrategias que utilizábamos para la multiplicación. Este gráfico permaneció expuesto durante nuestras sesiones como una forma de animar a todos a nombrar y observar las estrategias.



Figura 10.4 • Cuadro de Rachel sobre las estrategias de los alumnos

Un pequeño detalle de este gráfico ilustra un aspecto importante de la representación del pensamiento de los alumnos. Para hacer el gráfico, pregunté a los alumnos cómo resolverían 5×3 . Los alumnos me dieron diferentes estrategias y yo las representé en el gráfico, de forma muy similar a una charla numérica sobre un solo problema. Un alumno utilizó 3×3 para explicar una estrategia de descomposición, diciéndome que utilizaban dos tres y luego añadían

un tres más. Primero lo representé como 2×3 y luego como $6 + 3$. Al alumno le molestó la forma en que lo representé (lo noté por su expresión de desconcierto). Le pregunté cómo escribirlo y me dijo que escribiera $3 + 3 = 6$ y luego $6 + 3 = 9$. El alumno estaba pensando en usar la suma repetida y yo cambié su estrategia a la multiplicación antes de que estuviera listo. Por eso suelo preguntar: «¿Te parece correcto?» o «¿He representado tu razonamiento?». Quiero que los alumnos vean su razonamiento representado en el papel de una forma que comprendan, para que lleguen a entender las representaciones simbólicas de su razonamiento.

Quiero que los alumnos vean su razonamiento representado en el papel de una forma que puedan entender, para que lleguen a comprender las representaciones simbólicas de su razonamiento.

NEURODIVERSIDAD Y FLUIDEZ EN LA MULTIPLICACIÓN

Cuando trabajamos con alumnos neurodiversos en su fluidez en las operaciones de multiplicación, debemos tener en cuenta varias cosas. En primer lugar, debemos asegurarnos de que la fluidez en las operaciones matemáticas no interrumpa la enseñanza de las matemáticas del nivel de su curso. He visto a alumnos expulsados de las clases de matemáticas de la escuela secundaria porque no se sabían de memoria las operaciones de multiplicación. La multiplicación es increíblemente importante, pero cualquier intervención debe ser simultánea y no sustituir la participación del alumno en las matemáticas de su nivel.

En segundo lugar, la idea de la memorización como objetivo único puede discriminar a los alumnos neurodiversos, que pueden tener dificultades particulares para memorizar (en lugar de reconstruir) operaciones matemáticas. Utilizamos diferentes partes de nuestro cerebro cuando derivamos problemas matemáticos utilizando estrategias de razonamiento y cuando recordamos a partir de la memorización. Esas áreas verbales del cerebro pueden verse afectadas en las personas con dislexia, lo que hace que la dificultad para recordar operaciones forme parte de la discapacidad. Es fundamental recordar que existen múltiples vías de desarrollo para la dislexia, por lo que no todos los estudiantes con dislexia tendrán estos déficits fonológicos (De Clercq-Quaegebeur et al., 2018). El uso de estrategias de razonamiento en las operaciones de multiplicación, en lugar de limitarse a recordar, se asoció con un mayor rendimiento en matemáticas y puntuaciones más altas en cálculo para los estudiantes disléxicos (Erenberg, 1995). Recomiendo asegurarse de que los estudiantes comprendan las estrategias de razonamiento necesarias para las operaciones derivadas y avanzar hacia la fluidez con juegos y otras prácticas de bajo riesgo. En este programa extraescolar, también introduje tarjetas didácticas que hicieron los estudiantes. Para algunos estudiantes, las tarjetas didácticas marcaron la diferencia en su capacidad de recordar. Para otros, la estrategia fue menos eficaz.

Recomiendo asegurarse de que los alumnos comprendan las estrategias de razonamiento necesarias para los hechos derivados y avancen hacia la fluidez con juegos y otras prácticas de bajo riesgo.

Y en tercer lugar, la memorización de operaciones matemáticas tiene un peso emocional para los alumnos que han experimentado fracasos en esta área. En la misma clase que Luis, conocí a un niño llamado Elijah. Elijah también tenía una discapacidad de aprendizaje, pero le costaba mucho más procesar el lenguaje, le llevaba tiempo entender lo que se le decía y necesitaba planificar sus respuestas (Lambert, 2017). Como muchos profesores de séptimo curso, la Sra. Márquez se sentía frustrada porque muchos de sus alumnos contaban con los dedos y decidió dedicar parte del tiempo de clase a que los alumnos se examinaran entre sí sobre las operaciones de multiplicación. Pasaba junto a Elijah y su compañero Bobby cuando vi que Elijah estaba claramente molesto. Elijah estaba utilizando papel de borrador, llevando un registro de una estrategia de operaciones derivadas. Bobby le había dicho a Elijah que no contaba si no recordaba la operación rápidamente sin utilizar papel de borrador. Elijah se defendió diciéndole a Bobby: «Las sé todas, solo que estoy presionado». Su mano subía y bajaba por su cuerpo, lo que sugería que sentía presión en todo el cuerpo. Cuando le pregunté meses después sobre este momento, Elijah me dijo que sabía las operaciones de multiplicación, pero que cuando se sentía presionado o estresado, no podía recordarlas. ¡Me encanta cómo Elijah se defendió contra la presión matemática injusta! Y cómo se conocía a sí mismo de esta manera, mostrando una fuerte comprensión de sí mismo. Esto fue resultado del entrenamiento estratégico con su maestra de educación especial de sexto grado, la Sra. Scott, sobre su discapacidad.

No recomiendo las pruebas cronometradas para que los alumnos recuerden datos, porque he oído a muchos adultos y niños hablarme del miedo y la ansiedad que les provocan las actividades cronometradas. Teniendo en cuenta lo negativa que es la relación de la mayoría de la gente con las matemáticas, no veo por qué utilizaríamos pruebas cronometradas cuando hay muchas otras formas de ayudar a los alumnos a desarrollar fluidez (no memorización, sino producir respuestas de forma eficiente). Utilizo actividades cronometradas en algunas de mis investigaciones, ya que necesito medir con precisión el crecimiento, pero utilizo entrevistas individuales que grabo en audio para poder ver qué estrategias utilizaron y cuánto tiempo les llevó. Si hago una prueba escrita, utilizo una evaluación con dos bolígrafos: los estudiantes trabajan dentro de un marco de tiempo determinado durante un tiempo concreto y, a continuación, cambian a otro color de bolígrafo. Entonces tienen tiempo ilimitado para utilizar ese bolígrafo. De esta manera, se pueden recopilar datos sobre lo que hicieron en dos condiciones de tiempo diferentes.

No recomiendo las pruebas cronometradas para los estudiantes que deben recordar datos, porque muchos adultos y niños me han contado el miedo y la ansiedad que les provocan las actividades cronometradas.

PRÁCTICA SIGNIFICATIVA A TRAVÉS DE JUEGOS

Los alumnos también necesitarán mucha práctica para poder recordar los datos. Franco y Jeremy también necesitaban ayuda para mejorar su fluidez en las operaciones de suma y resta. Decidí añadir algunos juegos que les ayudaran a desarrollar estrategias y mejorar su fluidez en la suma y la resta. Elegí Shut the Box (**Figura 10.5**), que originalmente era un juego

de pub en Inglaterra. En este juego, los alumnos lanzan dos dados y suman los puntos (los puntos de los dados). Los lanzan en la caja del juego, que tiene nueve palancas que originalmente están colocadas hacia arriba, cada una con un dígito diferente del 1 al 9 escrito en ella.



Figura 10.5 • Alumnos jugando a Shut the Box

Los jugadores toman el número que sacan y pueden bajar la palanca correspondiente a ese número. Así, si sacan un 3 y un 5, pueden bajar la palanca del 8. Pero también pueden optar por bajar la palanca del 1 y del 7; o la del 2 y la del 6; o la del 1, la del 2 y la del 5 (lo que significa que no solo están haciendo sumas, sino que también están practicando la descomposición de los números; véase **la figura 10.5**). En nuestra versión del juego, los jugadores se turnaban para tirar los dados hasta que uno de ellos cerraba su caja.

Cuando reuní a los niños para comenzar una de nuestras lecciones, les dije que empezaríamos con un juego y les mostré la caja. Franco y Jeremy sonrieron con entusiasmo, emocionados por jugar a un juego de verdad. A los niños les encanta que los juegos tengan piezas y tableros «reales». Franco sacó un 6 y un 3. Pude ver cómo contaba, moviendo los labios y mirando los puntos del dado, contando primero el 6 y el 3, y luego todos juntos. Le pregunté cuál era su estrategia y me respondió: «los dedos». Jeremy sacó un 5 y un 4. Su estrategia era diferente. Empezó con el número más grande (5), contando con los dedos para llevar la cuenta: «6, 7, 8, 9». Le pregunté a Jeremy cuál era su estrategia y él la llamó «sumar». Jugaron varias rondas. Ambos siguieron utilizando la misma estrategia de forma constante, hasta la ronda 5.

En su última jugada, Franco sacó un 5 y un 2, y empezó con el 5, utilizando los dedos para llevar la cuenta mientras sumaba: «6, 7». Franco sonrió ampliamente y me dijo: «¡He probado su estrategia!». Franco no solo había probado la estrategia de Jeremy, sino que también había

elegido estratégicamente el número más grande para sumarlo. Me encantó. Esto también demuestra que lo más importante cuando los alumnos juegan es conseguir que se den cuenta y nombren sus estrategias, y cómo esto facilita que otros alumnos adopten nuevas estrategias. Para más información sobre cómo se desarrolla la fluidez en las operaciones de suma, véase «Desentrañando una idea fundamental: fluidez con la suma y la resta por debajo de 20» (p. 155). Nuestro equipo de investigación está estudiando un programa de intervención en el que jugamos a juegos matemáticos no digitales con los alumnos para abordar el aprendizaje incompleto. Hemos empezado, a partir de nuestras observaciones y entrevistas con profesores y alumnos, a nombrar las características de los buenos juegos matemáticos, entre las que se incluyen las siguientes:

Involucra a los alumnos en ideas fundamentales de las matemáticas (incluidas las conversaciones matemáticas).

Incluyen modelos matemáticos y/o elementos visuales (los puntos de los dados).

Incluyen un elemento estratégico (¡no son solo hojas de ejercicios disfrazadas de juego!).

Permite que alumnos con diferentes niveles de habilidad jueguen juntos.

Uno de los juegos más populares en nuestro trabajo es Multi (Joyful Mathematics, <https://bit.ly/3rux7mt>). Este juego es un tres en raya en nueve tableros pequeños (cada uno de los cuales tiene un factor de los dígitos del 1 al 9) y un tablero grande de tres en raya. Los alumnos eligen factores para hacer problemas de multiplicación, lo que les permite trabajar estratégicamente para ganar tableros o bloquear a sus oponentes. El tablero incluye matrices, que algunos alumnos utilizan para apoyar su razonamiento. Hemos observado que a los alumnos les encanta jugar por parejas contra otra pareja; hemos descubierto que los alumnos mantienen muchas conversaciones matemáticas y estratégicas para planificar juntos sus movimientos (para más información sobre los juegos, consulte la Guía de prácticas docentes en línea).



Guía de práctica docente en línea [grs.ly/l7f7rwq](https://bit.ly/l7f7rwq)

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Ha observado que la fluidez en las operaciones matemáticas supone un obstáculo para los alumnos? ¿De qué manera?
2. ¿Qué ha observado y qué le ha llamado la atención de mi trabajo en este capítulo? ¿Qué más le gustaría saber sobre mi enseñanza o nuestros programas de intervención?
3. ¿Cómo ha utilizado los juegos en su clase? ¿Cómo podrían ayudar a los alumnos a dominar las operaciones matemáticas?

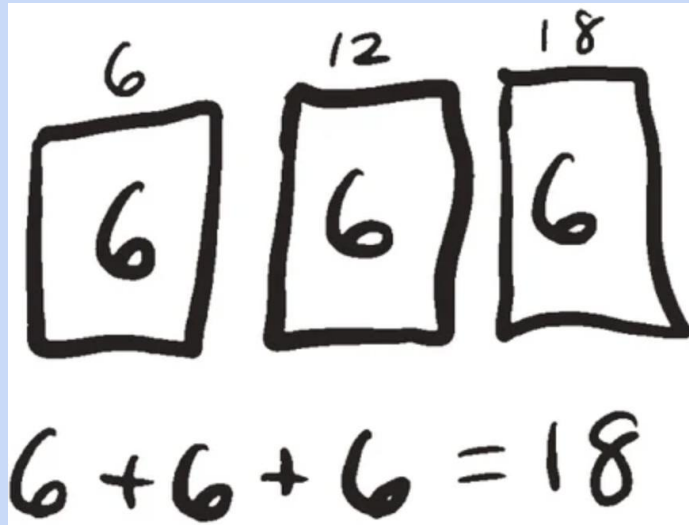
Participación	Representación	Acción estratégica
Trabajé para crear un entorno de grupos pequeños en el que Franco y Jeremy se sintieran seguros. La intervención se diseña en torno a la participación en la resolución de problemas matemáticos, incluyendo juegos.	La multimodalidad es el núcleo de esta intervención, en la que trabajo para ayudarles a conectar los manipulativos concretos con el simbolismo de una ecuación y con la representación visual de una matriz. La instrucción sigue una secuencia intencionada.	Observo y nombro las estrategias de los alumnos para ayudarles a aprender nuevas estrategias. Les apoyo utilizando múltiples modalidades para expresar lo que saben.

Desentrañar una idea fundamental: multiplicación y división tempranas con problemas narrativos

Al igual que en la suma y la resta, nos basamos en la intuición natural de los alumnos sobre los números utilizando problemas sencillos con estructuras matemáticas específicas (Carpenter et al., 2015). Existen tres esquemas básicos (Tabla 10.2).

Tipo de problema	Cómo interpretan los alumnos la acción con el modelado directo
Multiplicación Rachel tiene tres paquetes de bolígrafos. Cada paquete tiene 6 bolígrafos. ¿Cuántos bolígrafos tiene en total?	Un problema de multiplicación es aquel en el que conocemos el tamaño del grupo y el número de grupos. Los alumnos que utilizan el modelado directo pueden

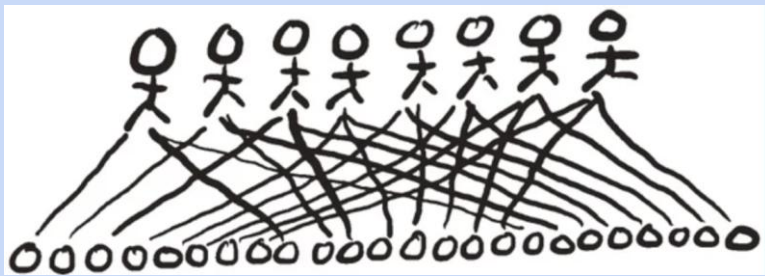
contar los cubos en grupos o dibujarlos.



División mediante reparto equitativo (también conocida como «división partitiva»)

Rachel tiene galletas para compartir con su clase. Tiene 24 galletas y 8 alumnos. ¿Cuántas galletas recibirá cada alumno si las reparte por igual?

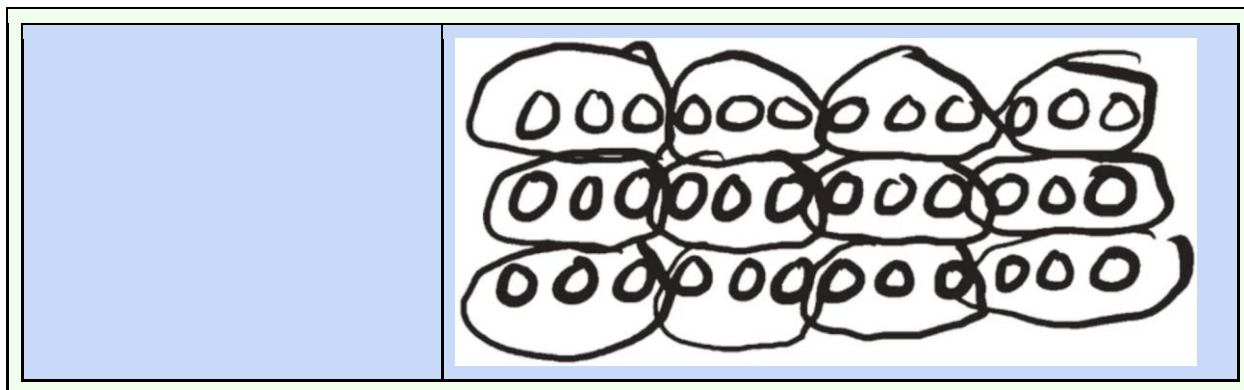
Este es un problema en el que sabemos el número de grupos, pero no cuántos hay en cada grupo. Los alumnos que utilizan el modelado directo pueden repartir los bloques en ocho montones o hacer un dibujo. La acción es repartir, como se reparten las cartas, porque se sabe cuántos grupos hay, pero no cuántos hay en cada grupo.



División mediante medición (también conocida como «división cotativa»)

Rachel tiene 36 manzanas. Pone 3 en una bolsa. ¿Cuántas bolsas necesita?

Este es un problema en el que sabemos el tamaño de cada grupo, pero no cuántos grupos hay. Utilizando el modelado directo, los alumnos suelen medir 3 bloques, luego 3 más, luego 3 más, y así sucesivamente, hasta llegar a 36. A continuación, cuentan cuántos conjuntos de 3 han medido.



Más información:

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (2015). Matemáticas para niños: Instrucción guiada cognitivamente (2.ª ed.). Heinemann.

Desentrañando una idea fundamental: fluidez con las operaciones de multiplicación

La fluidez en las operaciones de multiplicación no se define solo como memorización, sino como la capacidad de los alumnos para expresar operaciones en un breve periodo de tiempo. Algunos utilizan 3 segundos como referencia. Recomiendo ser flexible a la hora de definir la fluidez cuando se trabaja con alumnos neurodiversos, que pueden tardar más en procesar las operaciones.

Los investigadores han descubierto que los alumnos desarrollan la fluidez con las operaciones matemáticas a través de tres fases (Bay-Williams y Kling, 2019). Las etapas de la fluidez en la multiplicación son las siguientes:

Fase 1. Contar (contar saltando números o sumas repetidas)

Fase 2. Derivación (utilizando estrategias de razonamiento basadas en datos conocidos)

Fase 3. Dominio (produce respuestas de manera eficiente)

Algunas operaciones suelen ser más fáciles. A los alumnos les resulta más sencillo contar de dos en dos, de cinco en cinco y de diez en diez, por lo que estas operaciones suelen ser las primeras en enseñarse. Los estudiantes también suelen conocer los cuadrados (4×4 , 6×6) antes que otras operaciones. Bay-Williams y Kling (2019) describieron esta progresión básica para el aprendizaje de las operaciones de multiplicación (reconociendo que no todos los estudiantes seguirán esta progresión), como se muestra en la Tabla 10.3.

Operaciones básicas 1	Operaciones básicas 2	Operaciones derivadas 1	Operaciones derivadas 2
2, 10 y 5 (2×6 , 10×3 , 4×5 , etc.).	1, 0 y cuadrados (2×2 , 3×3 , etc.).	Duplicar los 2 que ya se conocen para resolver los 4, 6 y 8.	Dividir los problemas en problemas más pequeños utilizando

		Sumar/restar un grupo de un dato que ya conoces.	la propiedad distributiva, utilizando operaciones que ya conoces.
<p>Un error frecuente es apresurar a los alumnos en la fase 2: Derivación. No solo lleva tiempo que los alumnos desarrollen y practiquen estas estrategias, sino que también es cuando desarrollan la comprensión de cómo funcionan las operaciones, lo cual es necesario para las matemáticas futuras, especialmente el álgebra. Los alumnos que utilizan una estrategia de descomposición y reflexionan profundamente sobre por qué $6 \times 7 = (6 \times 6) + (6 \times 1)$ están pensando en la equivalencia algebraica.</p>			

Más información:

Bay-Williams, J. y Kling, G. (2019). *Fluidez en las operaciones matemáticas: más de 60 juegos y herramientas de evaluación para apoyar el aprendizaje y la retención*. ASCD.

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 10.2 • Pizarra que muestra las estrategias de Franco y Jeremy para la multiplicación

La pizarra está dividida en una tabla con 2 columnas y 3 filas. Las columnas representan las estrategias de Franco y Jeremy.

En la primera fila y la primera columna, Jeremy dibuja dos torres de cinco cubos. Escribe: «¿Cuántos cubos? 5 más 5 es igual a 10».

En la primera fila, segunda columna, Franco escribe 2 por 5. Dos grupos de 5 son 10. Dos torres de 5 son 10 cubos.

En la segunda fila, primera columna, Jeremy dibuja 4 torres de 5 cubos. Estas están etiquetadas como 5, 10, 15, 20. Escribe: «¿Cuántos cubos?». Escribe: «Contando de uno en uno, contando de cinco en cinco, sumando, formando grupos. 10 más 10 es igual a 20».

En la segunda fila, segunda columna, Franco escribe 4 por 5 es igual a 20. 4 grupos de 5 son iguales a 20. 4 torres de 5 cubos son iguales a 20.

En la tercera fila, primera columna, Jeremy dibuja 6 torres y etiqueta cada torre con el número 5.

En la tercera fila, segunda columna, Franco escribe 6 por 5 es igual a 30.

Figura 10.3 • Paisaje para la multiplicación y la división

El diagrama se presenta como 13 casillas etiquetadas. Hay 13 posibles caminos a través de la multiplicación, como se muestra a continuación.

Algoritmo de multiplicación tradicional.

Algoritmo de productos parciales.

Descompone utilizando el valor posicional. Esta es la propiedad distributiva.

Operaciones de multiplicación fáciles de recordar o derivar.

Duplicar y dividir por la mitad. Esta es la propiedad asociativa.

Comprende los patrones al multiplicar por decenas y múltiplos de decenas.

Operaciones derivadas, utilizando operaciones que ya conoces para resolver otras operaciones.

Descompone factores, dividiéndolos.

Agrupar los grupos.

Contar saltando números.

Suma repetida.

Duplica.

Cuenta de uno en uno. Esto se conoce como modelado directo.

Figura 10.4 • Tabla de estrategias de los alumnos de Rachel

El cuadro muestra un círculo central con la etiqueta «Estrategias para la multiplicación y la división». El ejemplo es 5 por 3. Las estrategias se presentan de la siguiente manera.

Contar saltando números. 5, 10, 15. Este método puede realizarse con los dedos.

Contar por números enteros y grupos. 3 por 3 es igual a 9. 3 por 2 es igual a 6. 9 más 6 es igual a 15.

Suma repetida. 3 más 3 más 3.

Construcción de torres. 5 torres de 3. 3, 6, 9, 12, 15. 3 torres de 5. 5, 10, 15.

Simplemente saberlo. 5 por 3 es igual a 15.

Sepáralos y vuelve a unirlos. 5 por 2 es igual a 10. 5 por 1 es igual a 5. 10 más 5 es igual a 15.

CAPÍTULO 11 DESARROLLO DE ESTRATEGIAS PARA LOS ESTUDIANTES MEDIANTE SECUENCIAS NUMÉRICAS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Visitar un grupo de intervención de cuarto grado que utiliza cadenas numéricas para la multiplicación.

Explorar la intervención en el compromiso para aumentar la participación de los alumnos en matemáticas

Comprender la práctica docente de una cadena numérica a través de un segundo ejemplo con porcentajes

VARIOS AÑOS ANTES del trabajo de multiplicación descrito en el último capítulo, nuestro grupo de investigación se dedicó a un estudio sobre las cadenas numéricas, la rutina de cálculo mental utilizada por Dina en el capítulo 9. Yo estaba en un aula de cuarto grado, observando a Yola, una estudiante universitaria, enseñar a un pequeño grupo de alumnos que necesitaban más apoyo en la multiplicación de varios dígitos. Esta es la cadena numérica que Yola escribió para esta sesión:

$$3 \times 10$$

$$3 \times 9$$

$$10 \times 8$$

$$9 \times 8$$

$$9 \times 7$$

Piénsalo

¿Qué estrategias crees que usarían los alumnos para resolver estos problemas? ¿Qué estrategia espera Yola desarrollar en los alumnos? ¿Cómo ha utilizado la secuenciación y la elección de números para lograr su objetivo?

La mayoría de los alumnos del grupo utilizaban el conteo por saltos. Yola quería utilizar una matriz para ayudar a los alumnos a ver que, al quitar un grupo, $3 \times 9 = (3 \times 10) - (3 \times 1)$, una forma en la que la propiedad distributiva puede ser útil en la multiplicación. Intentaba ayudar a los alumnos a pasar del conteo por saltos a los productos parciales/hechos derivados utilizando decenas (véase «Desglosar una idea fundamental: estrategias para la multiplicación y la división de números de varios dígitos» en la página 190).

Yola planteó cada problema uno por uno, escribiéndolo en la parte izquierda de la pizarra.

Figura 11.2 • Cadena numérica de Yola con anotaciones

Piénsalo

Tómese un momento y vea si puede encontrar pruebas de las estrategias de los alumnos. ¿En qué pensaban los alumnos mientras resolvían estos problemas?

Durante esta cadena numérica, los alumnos discutían con entusiasmo la estrategia de Abraham. Abraham, al resolver 3×9 , primero hizo sumas repetidas con 10 y luego «menos 1, menos 1, menos 1 de 30». Yola le pidió que explicara su razonamiento y lo escribiera en la pizarra. Luego le hizo algunas preguntas de seguimiento, lo que le llevó a hacer su estrategia un poco más eficiente: «Es solo menos 3 porque es 3 veces». Yola también modeló la estrategia en la matriz para que los alumnos pudieran ver dónde estaba el «menos 1, menos 1, menos 1», así como el «menos 3». Abraham vuelve a utilizar esta estrategia para 9×7 . Se puede ver cómo Abraham está empezando a comprender la propiedad distributiva a través de su propio camino único.

Mientras observaba esta cadena numérica, me fijé en una alumna a la que llamaremos Inez porque, a diferencia del resto de los alumnos de su grupo de matemáticas de cuarto curso, no utilizaba los dedos para llevar la cuenta. Estaba bastante segura de que Inez estaba contando de dos en dos porque vi que movía la boca, pero mantenía las manos debajo de la mesa, casi como para asegurarse de no utilizarlas. Cuando los alumnos estaban compartiendo por parejas un problema, me arrodillé en silencio junto a Inez y le pregunté si tal vez le ayudarían los dedos, mencionando lo útiles que me parecían. Ella me miró con desdén y me dijo que no «necesitaba usar los dedos». También me di cuenta de que Inez no compartía ninguna respuesta con el grupo ni con su compañero durante los turnos de conversación.

He trabajado con muchos alumnos que preservaban su dignidad matemática evitando ciertas herramientas, siendo los dedos las más comunes (a pesar de lo útiles que son los dedos matemáticamente; Moeller et al., 2012). Según mi experiencia, eso suele significar que el niño ha sido avergonzado por utilizar la herramienta, ya sean los dedos o una tabla de cientos. Sé que cuando trato con un niño que ha sido avergonzado anteriormente en clase de matemáticas, ese niño necesita una atención especial y que se le anime a arriesgarse en matemáticas.

Inez es latina y multilingüe y estaba en cuarto grado en el momento del estudio.¹ Era una participante amigable, amable e interesada en el mundo social del aula. Inez no tenía un Programa de Educación Individualizado (IEP), pero estaba siendo sometida a una segunda derivación a educación especial. Nos centramos en Inez como ejemplo de una estudiante que puede tener o no una discapacidad, pero que necesita más apoyo en matemáticas.

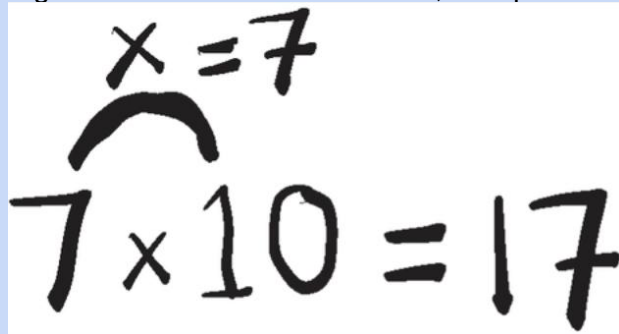
¹ Estos datos se analizaron con la ayuda de mis colegas Tomy Nguyen, Monica Mendoza y Avery McNiff (Lambert, Nguyen, et al., 2022).

Yola me dijo después de la sesión que ella también estaba preocupada por Inez, más que nadie en el pequeño grupo de intervención. Yola se dio cuenta de que Inez siempre estaba atenta, siempre tenía los ojos puestos en la pizarra, pero no respondía a ninguno de los problemas ni participaba en las discusiones en parejas sobre los problemas. Yola decidió que tenía que cambiar las condiciones de aprendizaje para que Inez pudiera participar en la

cadena numérica, lo que, con suerte, le llevaría a nuevos conocimientos matemáticos sobre la multiplicación. Pero lo primero era conseguir su participación. Este se convirtió en el objetivo de Yola en la siguiente cadena numérica: ¿cómo podía ayudar a Inez a arriesgarse y participar en este pequeño grupo?

A continuación, ofrecemos algunos antecedentes sobre nuestro programa de intervención (Lambert, Nguyen, et al., 2022). Este proyecto se diseñó para (a) proporcionar oportunidades a los alumnos para que ejercieran su agencia matemática mediante el intercambio de ideas en matemáticas y (b) aumentar las estrategias de los alumnos en la multiplicación de varios dígitos. Utilizamos una evaluación y las recomendaciones de los profesores para decidir a qué alumnos invitar. Los estudiantes universitarios impartieron clases a los pequeños grupos durante la hora de matemáticas en una escuela local utilizando cadenas numéricas (Fosnot y Uittenbogaard, 2007).

Hablamos con el profesor de la clase para saber un poco más sobre Inez. El profesor de cuarto curso de Inez me dijo que ella no participaba muy a menudo en la clase de matemáticas y que, cuando lo hacía, solía utilizar estrategias matemáticas que a él (el profesor) le costaba entender. Observamos en la evaluación escrita de Inez que tenía pocos trabajos escritos, además de un «algoritmo defectuoso» para la multiplicación de varios dígitos. Resolvió 10×7 como 17, multiplicando el 7 por el 1 (Figura 11.3).



The image shows a student's handwritten work on a white background. At the top, the student has written $x = 7$. Below this, there is a large, curved line that arches over the numbers in the equation below. The equation itself is $7 \times 10 = 17$. The numbers are written in a simple, somewhat shaky hand.

Figura 11.3 • Evaluación escrita de Inez antes de la intervención

Un algoritmo defectuoso es cuando un estudiante aprende solo una parte de un algoritmo estándar, como la multiplicación. Esto puede suceder cuando se enseña a los estudiantes a seguir reglas que no comprenden, como en este caso, en el que Inez parece entender algo sobre la multiplicación de números, pero no lo ha relacionado con el valor posicional de la respuesta.

Yola comenzó centrándose en cambiar la participación de Inez. Decidió sentar a Inez justo a su lado, en la parte delantera de la mesa, para ver si podían mantener conversaciones que despertaran su interés. Yola también decidió que a Inez le vendría bien tener su propia copia de las matrices en cartulina. Así que Yola sentó a Inez justo delante del pequeño grupo y comenzó cada problema entregándole a Inez su propia copia de cada matriz. Con este apoyo, Inez empezó a compartir sus ideas. Yola e Inez charlaron en voz baja durante los turnos y las conversaciones. Inez parecía especialmente contenta de tener su propia matriz, que utilizó para cada problema.

Ahora que Inez compartía sus estrategias, a Yola le preocupaba no saber cómo responder a algunas de ellas. En una cadena numérica poco después de estos cambios, Yola planteó la pregunta 9×4 . Inez respondió 50 y dijo que su estrategia era contar de 5 en 5. Yola

representó su conteo junto a una matriz de 9×4 , estableciendo conexiones entre los dos modelos. Inez miró fijamente la matriz y el conteo representado junto a ella y dijo: «¿Qué diablos?».

Yola no estaba segura de qué hacer a continuación. Siguió adelante, pero prestó mucha atención a cómo Inez utilizaba las matrices de cartulina. Yola se dio cuenta de que contaba cada casilla de la matriz como un 2 o un 5 y que a menudo perdía la cuenta de su respuesta. Yola decidió ayudar a Inez si esto volvía a ocurrir, en lugar de seguir adelante sin más.

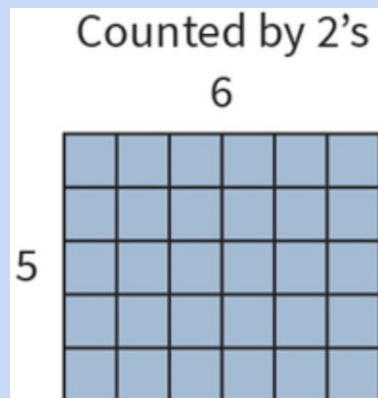
En la siguiente cadena numérica, Yola planteó el problema de 6×5 . Yola le preguntó a Inez qué resultado había obtenido:

Inez: 62.

Yola: ¿Quieres decirme cómo has obtenido 62?

Inez: Sí, conté la matriz de dos en dos.

Yola: Contaste toda la matriz de dos en dos. ¿Le diste 2 a cada cuadrado? ¿Fuiste 2, 4, 6, 8, 10? [señala un cuadrado cada vez mientras cuenta de dos en dos]. . . . Vale, contaste de dos en dos. Son muchos 2 que escribir, así que solo voy a escribir «contado de dos en dos».



Observe cómo Yola no da ninguna indicación de que Inez esté equivocada. Se asegura de comprender la estrategia y la vuelve a representar utilizando gestos y palabras sin juzgar. Pero eso no significa que Yola no esté ofreciendo retroalimentación: la retroalimentación más importante aquí es la representación. Al escuchar y luego volver a representar la estrategia de un estudiante, le permitimos verlo con nuevos ojos.

Yola: Veámoslo de nuevo en la tabla para comprobar nuestras respuestas. ¿Cuántos hay en cada columna?

Inez: 5.

Yola: 5, correcto. Y todas son iguales, ¿verdad? [gestos a lo largo de la matriz] Así que todas tienen cinco. Entonces, si hago esto y hago dos columnas [cubre la matriz para que solo se vean 2 columnas], ¿cuántos tenemos?

Inez: 10.

Yola: 10, correcto. Y podemos seguir haciendo eso para usarlo para contar de dos en dos, ¿verdad? Tal como hicimos antes. 5, 10, 15, 20, 25, 30. (Otros estudiantes se unen a ella para contar en voz alta, Yola muestra cada número en la tabla). Inez, ¿tiene sentido? ¿Cómo podemos usarlo para contar así? Sé que eres muy buena contando de 5 en 5.

Inez: (Inez toma su copia de la matriz y cuenta en silencio; la clase la espera). Sí, llegué muy, muy lejos (sonriendo).

Yola: (riendo con Inez) Sí, llegaste muy, muy lejos; está bien

(Lambert, Nguyen, et al., 2022, p. 92).

Yola observó la estrategia de contar de dos en dos, pero decidió en ese momento aprovechar la fortaleza de Inez para multiplicar de cinco en cinco, llamando la atención sobre las columnas de cinco. Esta es la segunda vez que Yola se esfuerza por provocar a Inez para que reconsidere su forma de pensar utilizando un modelo visual, guiándola hacia una estrategia que puede utilizar (ya que sabe que Inez puede contar de cinco en cinco). Yola esperó mientras Inez volvía a contar utilizando los 5. Inez pareció entrar en desequilibrio por este intercambio, diciendo: «He llegado muy, muy lejos». Este comentario parece relacionar su estrategia con el número mucho más alto al que ha llegado.

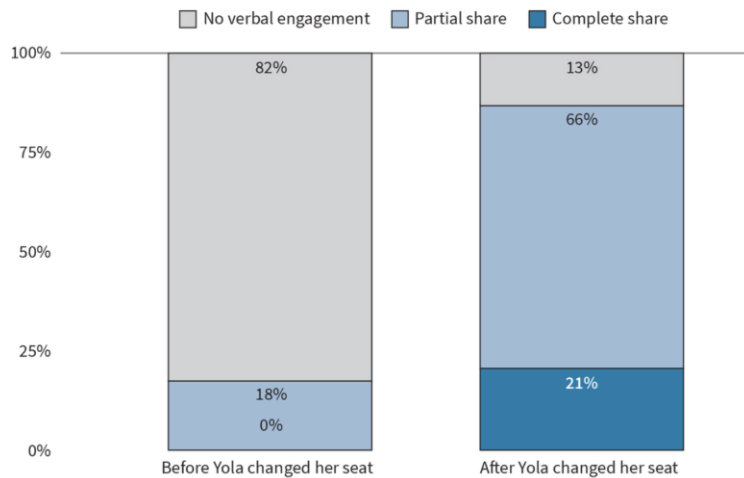
El desequilibrio es el término constructivista para ese momento en el que una estrategia antigua ya no funciona. Conectar las representaciones visuales y numéricas de su propia estrategia pareció hacer visible para Inez su propio pensamiento, lo que le permitió comprenderlo. También me encanta lo divertido que es este momento entre Inez y Yola, ya que ambas terminan el intercambio sonriendo. Inez ha pasado de ser la niña que se negaba a contar con los dedos a volver a contar en una matriz delante de todo el grupo mientras ellos observan, y luego darse cuenta (con la ayuda de la representación) de que «llegó muy, muy lejos», un comentario que vincula su nueva comprensión con los conceptos de magnitud en una matriz.

En la siguiente cadena numérica, Inez cuenta dos veces una matriz de uno en uno, con éxito para 6×6 y con un número de diferencia para 9×6 . A través del debate sobre sus estrategias en el grupo reducido, en el que el tutor hizo visibles sus estrategias modelándolas en matrices, Inez comenzó a desarrollar su comprensión de la estructura espacial de la matriz. En la evaluación de seguimiento, Inez fue capaz de dibujar matrices y contarlas para resolver con éxito una variedad de problemas, algo que no había podido hacer en evaluaciones anteriores.

Nuestro análisis de las evaluaciones demostró el crecimiento conceptual y procedimental de Inez durante las sesiones, ya que pasó de algoritmos inexactos que no funcionaban y de un conteo por saltos inexacto al uso preciso de representaciones de matrices y sumas repetidas. Inez se desarrolló considerablemente como creadora de sentido estratégico, pero solo después de que Yola cambiara la intervención para ayudar a Inez a participar y creara oportunidades para que Inez reflexionara sobre su propio pensamiento. ●

INTERVENCIÓN EN LA PARTICIPACIÓN

Un miembro de nuestro equipo de investigación, Tomy Nguyen, realizó un análisis detallado en vídeo de la participación de Inez. Antes de estos cambios, Inez no participaba verbalmente en el 82 % de los problemas. Después de los cambios, Inez participó verbalmente en el 87 % de los problemas.



Antes de que Yola realizara estos cambios, Inez rara vez compartía una estrategia parcial (una información incompleta o inexacta) en el 18 % de los casos y nunca una estrategia completa (definida como precisa y detallada). Pero después de estos pequeños cambios de diseño, Inez compartió una estrategia parcial en el 66 % de los casos y una estrategia completa en el 21 % de los casos. Podemos ver que 1) cambiar su asiento, 2) hablar con ella durante los turnos y las conversaciones, y 3) proporcionar una matriz transformó la participación de Inez en la cadena numérica.

Los alumnos que tienen dificultades en matemáticas pueden necesitar una intervención en la participación, en lugar de o en combinación con una intervención en el contenido. La participación en el debate matemático es importante en el aprendizaje de las matemáticas. Los detalles de las estrategias que comparten los niños predicen el rendimiento en matemáticas (Webb et al., 2014). Explicar claramente las propias ideas y participar en las ideas matemáticas de otros alumnos está correlacionado con los resultados del aprendizaje de los alumnos (Ing et al., 2015). Me encanta cómo Yola comenzó primero con la participación, asegurándose de que Inez se sintiera cómoda compartiendo sus estrategias.

Piénsalo

¿Alguna vez ha intervenido en la participación de un alumno con el que quería que se involucrara más en las matemáticas? ¿Qué estrategias utilizó?

¿QUÉ ES UNA CADENA NUMÉRICA?

Las cadenas numéricas son mis rutinas matemáticas favoritas. Las enseñé desde 1999, cuando las aprendí de Willem Uittenbogaard, un educador matemático holandés que trabajaba con profesores de Nueva York como yo durante el verano en Math in the City, un centro de desarrollo profesional fundado por Cathy Fosnot. He visto cadenas numéricas llamadas «mini lecciones», «charlas numéricas» y «cadenas de problemas», pero yo me quedo con el nombre que les dieron cuando las trajeron por primera vez a Estados Unidos educadores matemáticos holandeses como Willem. Estoy tan obsesionada que cofundé un sitio web llamado numberstrings.com con la Dra. Kara Imm; ¡échale un vistazo! También puedes encontrar más información sobre las cadenas numéricas en la Guía de prácticas docentes en línea.



Guía de práctica docente en líneaqrs.ly/l7f7rwq

Como vimos con Dina en el capítulo 9, la estructura básica de una cadena numérica es una serie de problemas diseñados para ayudar a los alumnos a explorar conceptos concretos y/o desarrollar estrategias útiles en el cálculo. Reúno a los alumnos en la alfombra o en la zona de reunión y les planteo el primer problema, recordándoles que utilicen los pulgares para indicarme que tienen la respuesta. Los problemas se plantean a los alumnos de uno en uno. Les doy mucho tiempo para esperar, utilizando los pulgares para hacerme una idea de cuántos alumnos están preparados. Si parecen atascados, les pido que se giren y hablen con un compañero. Después de pedir a un alumno que explique su estrategia, la represento en la pizarra (o en un papel grande). Escribo ecuaciones para representar las estrategias de los alumnos, escribiendo sus nombres junto a sus razonamientos en la pizarra. También represento el razonamiento de los alumnos utilizando un modelo matemático, uno que quiero utilizar especialmente durante esa cadena numérica. Puedes verme enseñar una cadena numérica a una clase inclusiva de alumnos de cuarto curso aquí: <https://bit.ly/3ZzkLpN>.

CADENAS NUMÉRICAS COMO RUTINAS DE INTERVENCIÓN

Esta atención cuidadosa al desarrollo de estrategias es particularmente importante para los alumnos con dificultades en matemáticas. Los alumnos que tienen dificultades en matemáticas suelen utilizar el mismo tipo de estrategias que los demás alumnos, pero no cambian a nuevas estrategias con la misma facilidad (por ejemplo, Geary, 2004). Así, en el caso de la multiplicación, es posible que veamos a alumnos que comienzan utilizando la suma repetida y continúan utilizando esa estrategia, mientras que sus compañeros pueden haber pasado a pensar en grupos parciales.

Los alumnos con dificultades en matemáticas suelen utilizar el mismo tipo de estrategias que los demás alumnos, pero no cambian a nuevas estrategias con la misma facilidad (por ejemplo, Geary, 2004).

Esta es una gran oportunidad para utilizar cadenas numéricas, un ejemplo de desarrollo estratégico guiado, que ayudará de forma más explícita a los alumnos a desarrollar nuevas estrategias. Durante una cadena numérica, no obligamos a los alumnos a utilizar una estrategia concreta, pero la estructura de la cadena hace que ciertas estrategias surjan de forma natural como objetos de debate. En una cadena numérica, se observan y se nombran las estrategias de los alumnos. El profesor representa cuidadosamente las estrategias de los alumnos. Los alumnos explican sus estrategias.



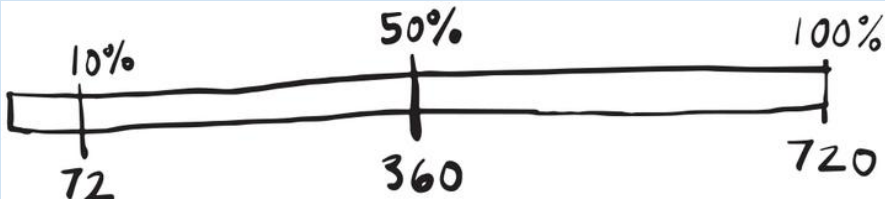
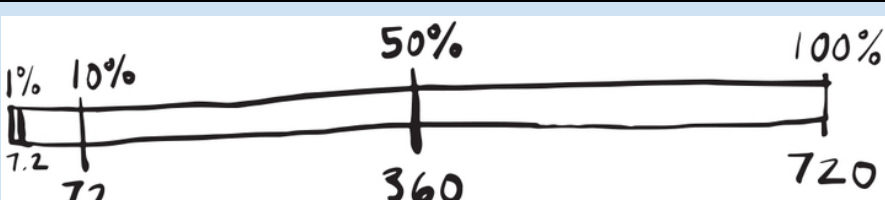
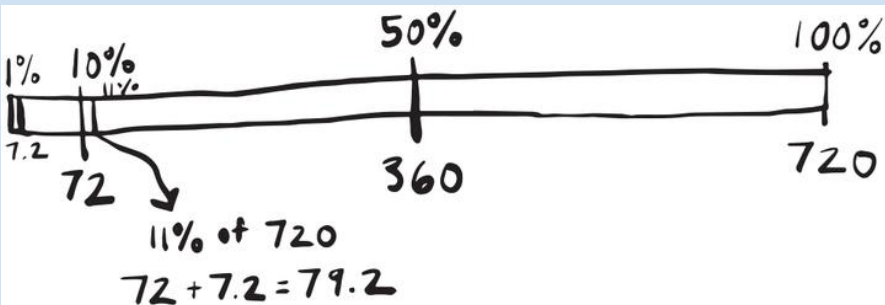
Una de las muchas razones por las que me encantan las cadenas numéricas es que son los alumnos quienes crean las estrategias. Creo que es necesario exponer a los alumnos a estrategias en las que quizá no hayan pensado por sí mismos, pero ¿por qué tienen que ser ideas del profesor? Me parece mucho más eficaz que sean los alumnos quienes propongan las estrategias. Nombrar las estrategias les da un poder adicional, como cuando Yola la llamó «la teoría de Abraham».

APOYO AL DESARROLLO ESTRATÉGICO CON CADENAS NUMÉRICAS: PORCENTAJES

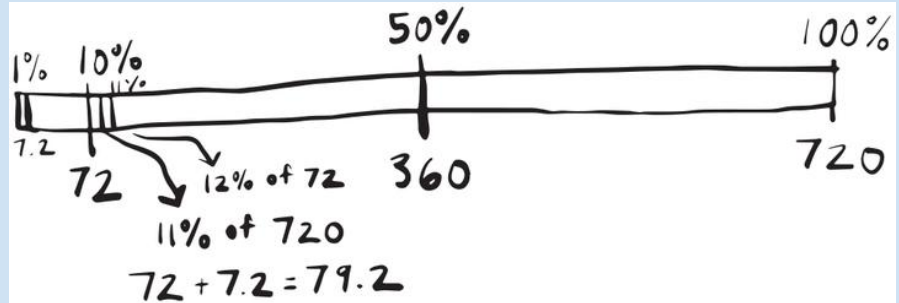
El desarrollo estratégico era una característica fundamental de mi trabajo en el aula. Con el tiempo, aprendí que, aunque los alumnos ideaban estrategias muy interesantes durante los debates, muchos de ellos no las recordaban al día siguiente. Creo que esta es una debilidad importante en la forma en que los profesores interpretan el aprendizaje basado en la investigación: tendemos a dar por sentado que, una vez que un alumno utiliza una estrategia, la hace suya. No es cierto. Y, en particular, los niños con problemas de memoria necesitan ayuda para recordar incluso las estrategias más ingeniosas que ellos mismos han inventado.

Para uno de mis alumnos de quinto grado, Emmanuel, las matemáticas tenían sentido cuando eran significativas. Las ideas generales le resultaban fáciles, pero recordar pasos o datos inconexos le parecía casi imposible. Emmanuel podía utilizar una estrategia genial durante una secuencia numérica y al día siguiente olvidarla.

Así que, para Emmanuel y muchos otros alumnos, me esforcé por identificar y nombrar sus estrategias para que les resultaran más fáciles de recordar. Cuando un alumno ideaba una estrategia, la convertíamos en objeto de debate. Hace mucho tiempo que enseñé a Emmanuel, pero todavía recuerdo su alegría durante esta secuencia numérica, en la que utilicé una representación con doble recta numérica (véase **la tabla 11.1**).

Problema de la cadena numérica	Mi representación con doble recta numérica
100 % de 720	 <p>A horizontal number line starting at 0 and ending at 720. A vertical tick mark is at 720, labeled "100%" above and "720" below.</p>
50 % de 720	 <p>A horizontal number line starting at 0 and ending at 720. Vertical tick marks are at 360 and 720. "50%" is written above 360, and "100%" is written above 720. "360" and "720" are written below their respective tick marks.</p>
10 % de 720	 <p>A horizontal number line starting at 0 and ending at 720. Vertical tick marks are at 72, 360, and 720. "10%" is written above 72, "50%" is written above 360, and "100%" is written above 720. "72", "360", and "720" are written below their respective tick marks.</p>
1 % de 720	 <p>A horizontal number line starting at 0 and ending at 720. Vertical tick marks are at 7.2, 72, 360, and 720. "1%" is written above 7.2, "10%" is written above 72, "50%" is written above 360, and "100%" is written above 720. "7.2", "72", "360", and "720" are written below their respective tick marks.</p>
11 % de 720	 <p>A horizontal number line starting at 0 and ending at 720. Vertical tick marks are at 7.2, 72, 79.2, 360, and 720. "1%" is written above 7.2, "10%" is written above 72, "11%" is written above 79.2, "50%" is written above 360, and "100%" is written above 720. "7.2", "72", "360", and "720" are written below their respective tick marks. An arrow points from the label "11% of 720" to the tick mark at 79.2. Below the number line, the calculation $72 + 7.2 = 79.2$ is written.</p>

12 % de 720



La acción realmente comenzó en el sexto problema, cuando les pedí a los alumnos que hallaran el 11 % de 720. Emmanuel levantó la mano rápidamente cuando se dio cuenta de que podía combinar el 10 % de un número y el 1 % de otro número para obtener el 11 % de un número. Los alumnos hicieron preguntas sobre esta estrategia, claramente interesados.

En mi último problema, el 12 % de 720, otros alumnos probaron la estrategia de Emmanuel, dándole crédito por la idea. Antes de terminar la cadena, escribimos juntos una descripción de la estrategia e hicimos un cartel:

La Estrategia de Emmanuel
Arma un porcentaje encontrando cifras que ya sabes (como 50% o 10% o 1%) y combinándolas.

Además de estos carteles, que mantuve para nuestras series numéricas diarias, también pedí a los alumnos que mantuvieran tablas de estrategias individuales en la primera página de sus cuadernos de matemáticas. Las utilizaba en las reuniones con los alumnos, para recordarles las estrategias que sabían utilizar y aquellas en las que estaban trabajando. Las tablas de estrategias individuales pueden ser una forma de comunicar a varios profesores (auxiliares docentes y co-profesores) qué estrategias está utilizando el alumno.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Qué observas y qué te preguntas sobre la historia de Yola e Inez?
2. Yola comienza trabajando para aumentar la participación de Inez en la intervención en grupos pequeños. ¿Qué estrategias utilizó? ¿Qué estrategias utilizas cuando ves que un alumno no participa lo suficiente en matemáticas?

3. Mientras Yola enseñaba a un grupo pequeño, mi historia sobre Emmanuel proviene de mi propia clase en una cadena numérica con toda la clase. ¿Cómo podrían cambiar las cadenas numéricas en estos diferentes contextos?

Participación	Representación	Acción estratégica
Antes de trabajar para cambiar las matemáticas de Inez, Yola trabaja para cambiar su participación. Esto nos recuerda que la participación es lo primero.	Yola está trabajando aquí para ayudar a los alumnos a conectar las estrategias de multiplicación con la matriz. El uso de las representaciones matriciales fue fundamental para ayudar a Inez a darse cuenta de lo que estaba haciendo.	Yola no le dice a Inez lo que tiene que hacer, sino que la orienta para que desarrolle sus propias estrategias y utiliza la retroalimentación para ayudarla a darse cuenta no solo de que ha cometido un error, sino también de por qué no ha funcionado.

Desglosando una idea central: estrategias para la multiplicación y la división de varios dígitos

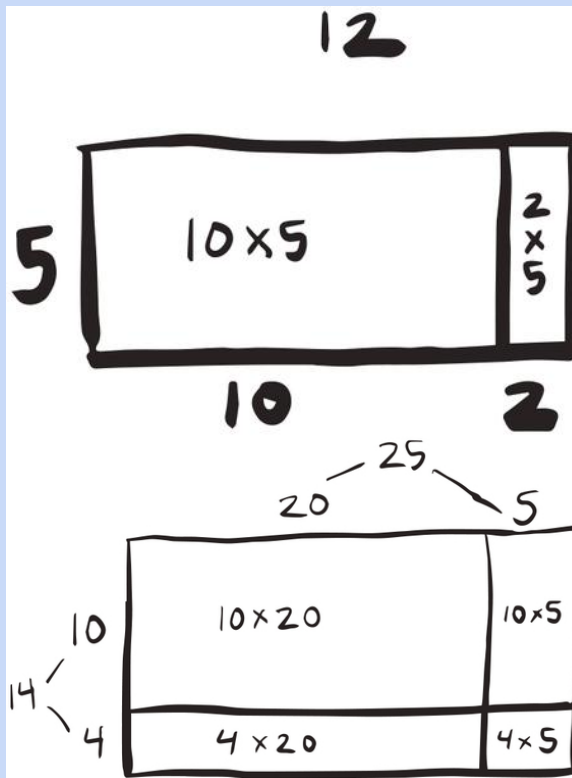
Los alumnos desarrollan estrategias para la multiplicación y la división de varios dígitos mediante la resolución de muchos problemas de multiplicación y división (Carpenter et al., 2015). Recomiendo dar a los alumnos muchas oportunidades para desarrollar y discutir estas estrategias. Debemos asegurarnos de que cada niño tenga estrategias que le funcionen, pero no se les debe obligar a utilizar estrategias que no tengan sentido para ellos. La tabla 11.2 ilustra algunas de las estrategias más comunes. Una idea subyacente importante para muchas de estas estrategias son los patrones de valor posicional que se producen al multiplicar por decenas. Los alumnos suelen aprender que 7×10 es 70 porque «solo hay que añadir un cero». Pero esa no es la razón por la que 7×10 es 70. Es porque siete grupos de 10 son 70, ya que $(7 \times 1) \times 10 = 70$. El «truco» funciona porque así es como funciona nuestro sistema numérico: cuando un número se multiplica por diez, pasa al siguiente lugar decimal. Las cadenas numéricas son una forma estupenda de ayudar a los alumnos a explorar estos patrones, sobre todo si les pedimos que expliquen por qué (véanse **las tablas 11.2 y 11.3**).

Descripción de la estrategia	Ejemplo (5×12 y 14×25)

«Descomponer»
(productos parciales)

Los alumnos suelen empezar a utilizar la propiedad distributiva para dividir los números en partes que multiplican y luego suman de nuevo. Esta estrategia se puede modelar con una matriz abierta (una matriz sin dibujar todas las casillas interiores).

Para un número de dos dígitos por otro de dos dígitos (o mayor), los alumnos tienen más partes que deben tener en cuenta. Para 25×14 , los alumnos deben pensar en 20×10 , 20×4 , 10×5 y 5×4 . Las matrices pueden modelar estas partes y preparar a los alumnos para comprender cómo funciona el algoritmo estándar.



Duplicar y dividir por la mitad (u otros usos de la propiedad asociativa)

Algunos alumnos juegan a crear un problema equivalente redistribuyendo los factores. Así, para 12×5 , un alumno podría cambiar el problema a 6×10 dividiendo por la mitad el 12 y duplicando el 5.

$$\div 2 (12 \times 5) \times 2 = 6 \times 10 = 60$$

Algoritmo de transición de productos parciales

Una vez que los alumnos hayan desarrollado una estrategia de productos parciales, puede presentarles este algoritmo de transición. Los alumnos piensan en todos los diferentes fragmentos que hay que multiplicar, empezando por los más grandes. Esto puede utilizarse como puente hacia el algoritmo estándar (o sustituirlo).

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 5 \\ \hline 50 \\ + 10 \\ \hline 60 \end{array} \quad \begin{array}{r} 25 \\ \times 14 \\ \hline 200 \\ 80 \\ 50 \\ + 20 \\ \hline 350 \end{array}$$

(Handwritten annotations for the first problem: (10×5) and (2×5) are written next to 50 and 10 respectively. For the second problem: (20×10) , (20×4) , (10×5) , and (5×4) are written next to 200, 80, 50, and 20 respectively.)

Descripción de la estrategia

Ejemplo ($60 \div 12$)

Resta repetida

Los alumnos que trabajan con divisiones con números grandes tienden a empezar utilizando la resta repetida o la suma repetida o contando de dos en dos hasta llegar a la respuesta. Así, si intentan resolver 60 dividido por 12, pueden sumar 12 hasta llegar al resultado. El ejemplo de la derecha muestra cómo un alumno podría restar repetidamente 12 de 60 para averiguar cuántas veces cabe.

$$\begin{array}{l} 60 - 12 = 48 \\ 48 - 12 = 36 \\ 36 - 12 = 24 \\ 24 - 12 = 12 \\ 12 - 12 = 0 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} 60 - 12 = 48 \\ 48 - 12 = 36 \\ 36 - 12 = 24 \\ 24 - 12 = 12 \\ 12 - 12 = 0 \end{array}} \right\} 5 \text{ groups of } 12$$

Multiplicar para dividir

La estrategia más común para la división es multiplicar hasta llegar al dividendo utilizando productos parciales. Así, un estudiante podría empezar a multiplicar 12 por diferentes números hasta llegar a 60.

$$\begin{aligned}12 \times 2 &= 24 \\12 \times 4 &= 48 \\12 \times 5 &= 60 \\ \text{so } 60 \div 12 &= 5\end{aligned}$$

Cotas parciales

Los estudiantes pueden dividir quitando partes del divisor.

$$\begin{array}{r}60 \div 12 \\ \hline 24 \quad 24 \quad 12 \\ \hline 2 \quad 2 \quad 1\end{array}$$

¿cuántos grupos de 12 puedo encontrar en 60?

Estrategias de proporción

Algunos problemas de división se pueden resolver más fácilmente si se piensan como fracciones (¡al fin y al cabo, las fracciones son divisiones!). Por lo tanto, un estudiante podría pensar en 60 dividido por 12 como $60/12$. A continuación, puede simplificar esa fracción a $30/6$ y obtener la respuesta 5.

$$\frac{60}{12} = \frac{30}{6} = \frac{15}{3} = 5$$

Algoritmo de transición de cocientes parciales

Una vez que los alumnos comprendan la estrategia de los cocientes parciales, puede presentarles este algoritmo de transición. Los alumnos se plantean la siguiente pregunta: «¿Qué partes de 12 puedo extraer de este número, llevando la cuenta de lo que queda y de cuántos grupos han encontrado?». Esto puede utilizarse como puente hacia el algoritmo estándar (o sustituirlo).

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 60} \\ \underline{24} \\ 36 \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array}$$

$12 \times 2 = 24$
 $12 \times 3 = 36$
 $2 + 3 = 5$

Algoritmos de transición

Probablemente, muchos lectores se preguntarán dónde encajan los algoritmos estándar para la suma, la resta, la multiplicación y la división. Los algoritmos estándar se desarrollaron hace cientos de años en la mayoría de los casos y han sido muy útiles para realizar cálculos largos, especialmente antes de que se inventaran las calculadoras. Su utilidad es ahora objeto de debate, ya que podemos utilizar calculadoras para realizar cálculos laboriosos. Los algoritmos pueden ser útiles, pero también pueden resultar confusos, difíciles de recordar y desconectados del significado de las matemáticas. Por esa razón, me preocupa más que mis alumnos sepan sumar, restar, multiplicar y dividir que si saben utilizar algoritmos para hacerlo. Los algoritmos son muy útiles, pero no son adecuados para todos los alumnos.

Una forma de diferenciar los distintos procedimientos para las operaciones con varios dígitos es mediante métodos basados en números y métodos basados en dígitos (Hickendorff et al., 2019). Los métodos basados en números mantienen el valor de los números enteros. Los alumnos inventan de forma natural estrategias como los productos parciales, en las que descomponen los números en función de su valor posicional. Los métodos basados en dígitos separan los números en dígitos, de modo que los alumnos piensan en un «5» que en realidad es un 50, pero lo consideran como un 5. Esto puede resultar muy confuso. Cuando los alumnos utilizan estrategias basadas en números, tienden a trabajar primero con los números más grandes, del mismo modo que nosotros tendemos a contar primero los billetes

más grandes cuando contamos dinero. Por el contrario, las estrategias basadas en dígitos hacen que los alumnos empiecen primero por los valores posicionales más pequeños, lo que puede resultar confuso. El transporte (o «préstamo») suele resultar confuso para los alumnos, no solo conceptualmente, sino también a la hora de seguirlo visualmente.

Las recomendaciones para enseñar algoritmos ahora retrasan la introducción hasta que los estudiantes (a) comprendan la idea central de la operación y (b) tengan algunas estrategias basadas en números que puedan utilizar. Para la multiplicación y la división, los estudiantes deben comprender el valor posicional y ser capaces de utilizarlo en una estrategia de productos parciales para poder comprender cómo funciona el algoritmo de multiplicación basado en dígitos. Para 34×27 , los estudiantes tendrían que ser capaces de descomponer los números en valores posicionales y recombinarlos para multiplicar todos los productos parciales juntos. Una matriz es útil para ayudarles a ver todos los fragmentos que necesitan combinar. A algunos estudiantes les gusta dibujar la matriz para llevar un registro de las partes mientras trabajan.

Una vez que los alumnos comprenden estas estrategias basadas en el valor posicional, hay un paso intermedio antes de enseñar el algoritmo estándar de multiplicación: el algoritmo de productos parciales. En este algoritmo, los alumnos piensan en los números reales en lugar de solo en los dígitos. Se puede guiar a los alumnos para que apilen las respuestas verticalmente. Para resolver 34 por 27, los alumnos se harían una serie de preguntas para encontrar el producto:

¿Cuánto es 30 por 20?

¿Cuánto es 30 por 7?

¿Cuánto es 20 por 4?

¿Cuánto es 4 por 7?

Y luego combinar para encontrar la respuesta.

Cuando se enseña un algoritmo estándar, tiene sentido utilizar una instrucción explícita. Los alumnos no necesitan inventar estos procedimientos tan especializados; nosotros podemos enseñárselos. Una instrucción paso a paso cuidadosamente diseñada, con modelos del profesor y prácticas de los alumnos, es eficaz para enseñar procedimientos como los algoritmos. Recomiendo especialmente utilizar una secuencia concreta, representativa y luego abstracta (CRA) en este tipo de instrucción explícita. La investigación de Flores y sus colegas muestra cómo utilizar la instrucción explícita para enseñar el algoritmo de productos parciales a los alumnos que están preparados para ello, utilizando manipulativos para asegurarse de que los alumnos establecen conexiones con el valor posicional (Flores y Milton, 2020).

Más información:

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (2015). *Las matemáticas de los niños: enseñanza guiada cognitivamente* (2.^a ed.). Heinemann.

Flores, M. M. y Milton, J. H. (2020). Enseñar el algoritmo de productos parciales utilizando la secuencia concreta-representativa-abstracta. *Exceptionality*, 28(2), 142-160.

<https://doi.org/10.1080/09362835.2020.1772070>

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 11.1 • Cadena numérica de Yola

La cadena numérica se presenta de la siguiente manera.

Se presenta una serie de 5 ecuaciones a lo largo del lado izquierdo del papel milimetrado, como se muestra a continuación.

3 por 10 es igual a 30.

3 por 9 es igual a 27.

10 por 8 es igual a 80. 80 menos 8 es igual a 72.

9 por 8 es igual a 72.

9 por 7 es igual a 63.

Se etiqueta una cuadrícula de 3 por 10, 10 más 10 más 10 es igual a 30. Este es un ejemplo de suma repetida.

Una cuadrícula de 3 por 9 está situada en el centro del gráfico. Hay varias respuestas a la pregunta «3 por 9». Las tres respuestas son 27, 37 y 28.

La teoría de Abraham se muestra como 3 por 9 es hacer la suma repetida de 10 más 10 más 10 es igual a 30. Luego, restar 1 tres veces de 30 para obtener 27.

En la parte inferior del gráfico hay una cuadrícula de 10 por 8. La suma repetida de 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 es igual a 80.

Otra solución muestra al alumno escribiendo 10 por 8 es igual a 80.

Otra solución muestra que 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 es igual a 70. Se escribe 7 veces menos 1 debajo. A continuación, se da la ecuación 70 menos 7 es igual a 63.

En la parte inferior de la tabla se muestra una cuadrícula de 9 por 8. Hay varias respuestas a la pregunta 9 por 8. Las respuestas son las siguientes.

9 por 8 es igual a 73.

9 por 8 es igual a 72.

10 por 8 es igual a 80. 80 menos 8 es igual a 72.

Contado de uno en uno.

Figura 11.1 • Cadena numérica de Yola

Esta ilustración muestra una versión anotada de la figura 11.1.

En la Figura 11.1, la cadena numérica se presenta de la siguiente manera.

A lo largo del lado izquierdo del papel milimetrado se presenta una serie de 5 ecuaciones, como se muestra a continuación.

3 por 10 es igual a 30.

3 por 9 es igual a 27.

10 por 8 es igual a 80. 80 menos 8 es igual a 72.

9 por 8 es igual a 72.

9 por 7 es igual a 63.

Se etiqueta una cuadrícula de 3 por 10, 10 más 10 más 10 es igual a 30. Este es un ejemplo de suma repetida.

Una cuadrícula de 3 por 9 está situada en el centro del gráfico. Hay varias respuestas a la pregunta «3 por 9». Las tres respuestas son 27, 37 y 28.

La teoría de Abraham se muestra como 3 por 9 es hacer la suma repetida de 10 más 10 más 10 es igual a 30. Luego, restar 1 tres veces de 30 para obtener 27.

En la parte inferior del gráfico hay una cuadrícula de 10 por 8. La suma repetida de 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 es igual a 80.

Otra solución muestra al alumno escribiendo 10 por 8 es igual a 80.

Otra solución muestra que 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 es igual a 70. Se escribe 7 veces menos 1 debajo. A continuación, se da la ecuación 70 menos 7 es igual a 63.

En la parte inferior de la tabla se muestra una cuadrícula de 9 por 8. Hay varias respuestas a la pregunta 9 por 8. Las respuestas son las siguientes.

9 por 8 es igual a 73.

9 por 8 es igual a 72.

10 por 8 es igual a 80. 80 menos 8 es igual a 72.

Contado de uno en uno.

Las anotaciones a la imagen de la figura 11.1 son las siguientes:

Este alumno resolvió 9 por 8 restando 8 de 10 por 8.

Un estudiante sabía que 8 por 10 era 80 y lo pensó verticalmente.

Abraham vuelve a utilizar su estrategia para 9 por 7, que resuelve con 10 por 7 y luego resta 1 siete veces.

Los alumnos contaban saltándose números o utilizaban la suma repetida para 3 por 10.

Aquí, Yola recopiló varias respuestas para 3 por 9.

Abraham utilizó el conteo por saltos de diez y luego restó 1 por cada grupo de 10. Yola escribió su nombre junto a su estrategia. Tenga en cuenta que se ha cambiado el nombre.

Participación de Inez en clase

La barra izquierda del gráfico muestra la participación de Inez en clase antes de que Yola cambiara su asiento, y la barra derecha muestra la participación de Yola en clase después de que se cambiara su asiento.

Los resultados muestran que Inez no participó verbalmente durante el 82 % del tiempo antes de que Yola cambiara de asiento. Después de que Yola cambiara de asiento, Inez compartió una estrategia parcial el 66 % del tiempo y una estrategia completa el 21 % del tiempo.

Posición del asiento de Yola	Sin participación verbal	Compartir parcial	Compartir completa
Antes de que Yola cambiara de asiento	82	18	0
Después de que Yola cambiara de asiento	13	66	21

«Descomponer» (productos parciales) **Ejemplo (5×12 y 14×25)**

Imagen 1

La ilustración muestra un rectángulo. El ancho es 12 y la altura es 5. El rectángulo se divide en dos secciones. La sección izquierda tiene un ancho de 10 y una altura de 5. La sección derecha tiene un ancho de 2 y una altura de 5. El ancho total de las dos secciones juntas es 10 más 2, lo que equivale a 12.

Imagen 2

La ilustración muestra un rectángulo dividido en cuatro partes. El ancho total es 25 y la altura total es 14. El cuadrante superior izquierdo tiene un ancho de 20 y una altura de 10. El cuadrante superior derecho tiene un ancho de 5 y una altura de 10. El cuadrante inferior izquierdo tiene una anchura de 20 y una altura de 4. El cuadrante inferior derecho tiene una anchura de 5 y una altura de 4. En la parte superior de la ilustración, el número 25 se descompone en 20 y 5. En el lado izquierdo de la ilustración, el número 14 se descompone en 10 y 4.

Algoritmo de transición de productos parciales Ejemplo (5×12 y 14×25)

Imagen 1

El primer ejemplo es 12 por 5 es igual a 50 más 10, lo que da un total de 60. La anotación muestra esta división como 10 por 5 y 2 por 5.

El segundo ejemplo es 24 por 14 es igual a 200 más 80 más 50 más 20 es igual a 350. El 200 se descompone en 20 por 10. El 80 se descompone en 20 por 4. El 50 se descompone en 10 por 5. El 20 se descompone en 5 por 4.

Ejemplo de resta repetida ($60 \div 12$)

La expresión es 60 dividido por 12.

La solución se muestra como 5 grupos de 12, de la siguiente manera:

60 menos 12 es igual a 48
48 menos 12 es igual a 36
36 menos 12 es igual a 24
24 menos 12 es igual a 12
12 menos 12 es igual a cero

Multiplicar para dividir Ejemplo ($60 \div 12$)

La expresión es 60 dividido por 12. Para llegar a esta respuesta, la ilustración muestra lo siguiente:

12 por 2 es igual a 24
12 por 4 es igual a 48
12 por 5 es igual a 60
Por lo tanto, 60 dividido entre 12 es igual a 5

Ejemplo de cocientes parciales ($60 \div 12$)

La expresión es 60 dividido entre 12 y el alumno preguntó lo siguiente: ¿cuántos grupos de 12 puedo encontrar en 60? Los cálculos escritos a mano muestran que el alumno divide el divisor, 60, en 24 y 24 y 12. Hay 2 grupos de 12 en 24. Hay otros 2 grupos de 12 en 24. Queda 1 grupo de 12, por lo que hay 2 más 2 más 1 grupos de 12 en 60.

Algoritmo de transición de cocientes parciales Ejemplo ($60 \div 12$)

La expresión es 60 dividido por 12. Los cálculos escritos a mano muestran que el alumno toma partes de 12 de 60. La primera línea muestra 24, que es 12 por 2. La segunda línea muestra 36, que es 12 por 3. 60 menos 24 menos 36 es igual a cero. Hay 2 más 3 grupos de 12, lo que equivale a 5. 60 dividido por 12 es igual a 5.

CAPÍTULO 12 APOYAR LAS RELACIONES Y LA COMUNIDAD EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Visitaremos una clase inclusiva de quinto grado mientras los alumnos resuelven problemas con fracciones.

Desarrollar el pensamiento relacional con problemas con fracciones.

Aprenderemos cómo los alumnos describen lo que es importante en una comunidad matemática

Seguiremos cómo un profesor desarrolla relaciones con alumnos neurodiversos

CUANDO VISITÉ POR PRIMERA VEZ el aula de quinto grado de la Sra. Rey, entré, respiré hondo y sentí un alivio inmediato. El ambiente era tranquilo, reflexivo y amable. Los niños escuchaban al profesor y se escuchaban entre ellos con especial atención. El enfoque de la clase era claramente el pensamiento matemático de los alumnos.

La Sra. Rey tenía una clase de 28 alumnos, 5 de los cuales tenían Programas de Educación Individualizados (IEP). Su escuela no era especialmente inclusiva con los alumnos con discapacidades, ya que la mayoría de ellos estaban en aulas separadas e independientes, pero ella luchó para que los niños con discapacidades entraran en su clase. Este año, la Sra. Rey tenía dos alumnos con autismo (Oscar y Ash) a tiempo completo en su clase, alumnos que antes no habían sido plenamente incluidos en la educación general. Su escuela era una escuela de Título I, y la mayoría de los alumnos tenían derecho a almuerzo gratuito. Casi todos los alumnos de su clase eran latinos, y más de la mitad estaban clasificados como multilingües. Este capítulo se basa en un proyecto de investigación colaborativo sobre la enseñanza inclusiva de las matemáticas (Lambert et al., 2020).²

² Estos datos se recopilaron y analizaron con la ayuda de mis colegas Shayne Brophy, Trisha Sugita, Cathery Yeh y Jessica Hunt (Lambert et al., 2020).

En otoño de su quinto curso, la Sra. Rey estaba trabajando con sus alumnos en el desarrollo del sentido de los números fraccionarios. Un día comenzó contando una historia sobre una situación que se había dado en su clase el año anterior, en la que cuatro alumnos intentaban averiguar cómo repartir 13 brownies. La Sra. Rey representó el problema y formuló algunas preguntas de comprensión para asegurarse de que los alumnos entendían el contexto. Solo entonces reveló el papel milimetrado con el problema escrito y lo leyó en voz alta dos veces.

Pruébalo

Tómese un minuto y resuelva este problema.

Cuatro niños se reparten 13 brownies a partes iguales. ¿Cuánto brownies le toca a cada niño?

A continuación, algunos alumnos repartieron hojas de papel en blanco a cada niño y todos comenzaron a resolver el problema (**Figura 12.1**). La clase estuvo en general en silencio durante los primeros 5 a 10 minutos, ya que la mayoría de los alumnos comenzaron a trabajar individualmente. Cuando se sentían preparados, los alumnos discutían sus estrategias con los demás compañeros de su mesa. Algunos alumnos se movían por el aula para discutir estrategias con compañeros de otras mesas. Me di cuenta de que un alumno, Tony, siempre se levantaba para discutir estrategias con alumnos de otras mesas. Ese día, terminó el problema antes de tiempo y se acercó a la mesa de Daniel para hablar sobre el problema. Daniel es un niño con dislexia que también era un alumno multilingüe, y que me dijo en las entrevistas que hablar con un amigo sobre los problemas le ayudaba a empezar. En la mesa de Daniel también estaban Ash y Kelani. La Sra. Rey circulaba por el aula, conversando con los alumnos. No les decía cómo resolver los problemas, sino que les hacía preguntas sobre su estrategia para asegurarse de que lo entendía.



Figura 12.1 • Kelani, Oscar, Daniel y Toby trabajan en el problema de los brownies

Piénsalo

Tómese un momento para observar las diferentes estrategias que utilizaron estos alumnos (véanse, por ejemplo, las figuras 12.2-12.4). ¿Cómo resolvió cada alumno el problema? Si usted fuera el profesor, ¿qué parte de cada estrategia le preguntaría más a un alumno?

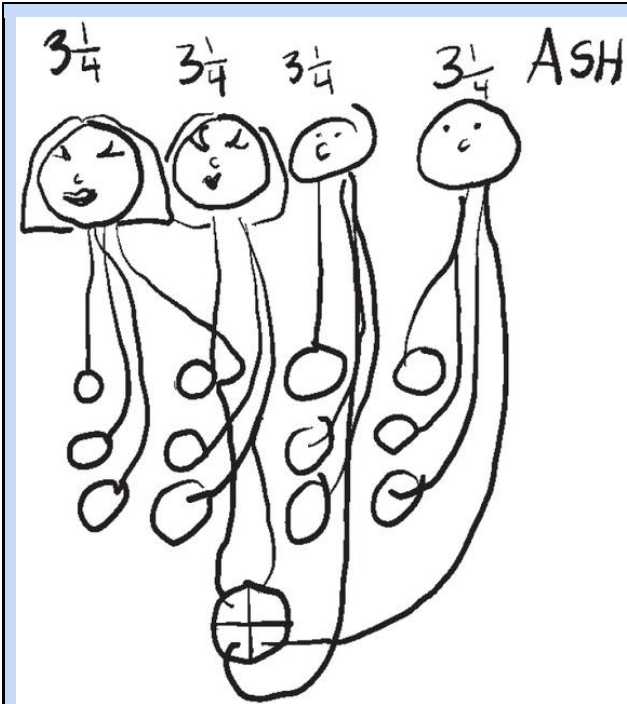


Figura 12.2 • La estrategia de Ash para el problema de los brownies

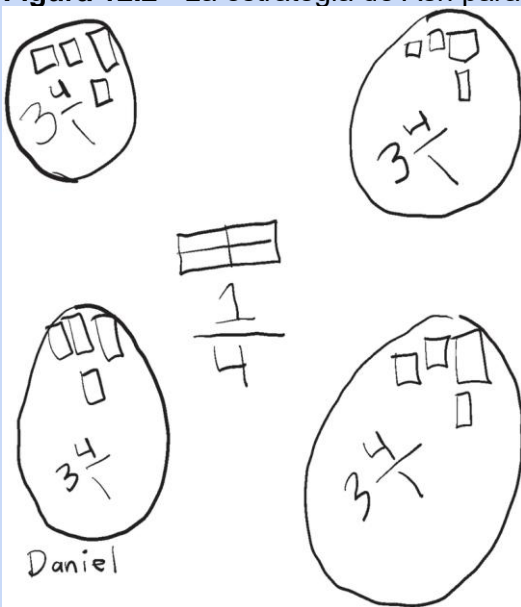


Figura 12.3 • Estrategia de Daniel para el problema de los brownies

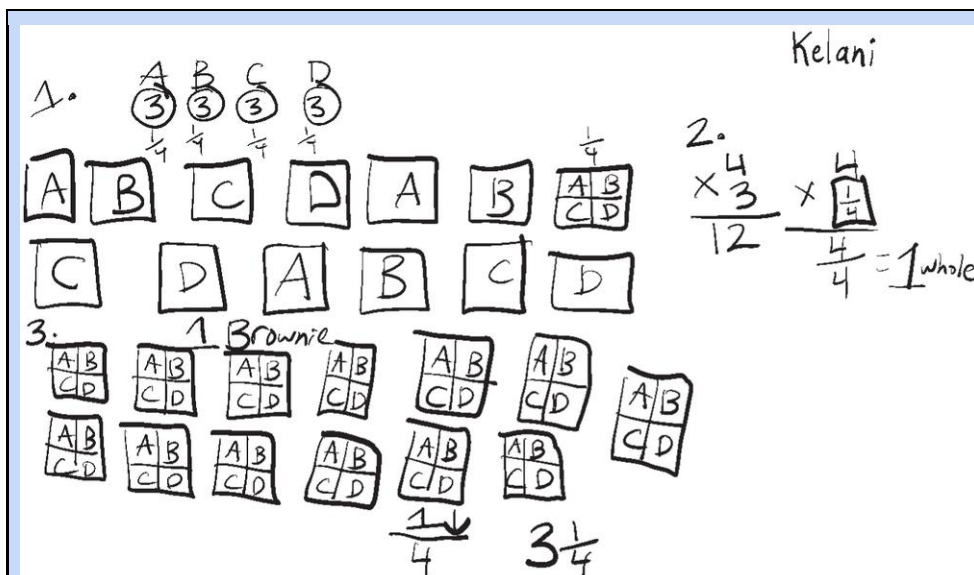


Figura 12.4 • Estrategia de Kelani para el problema de los brownies

La mayoría de los alumnos lo resolvieron como Ash (**figura 12.2**) utilizando el modelado directo: dibujando una representación de los cuatro alumnos, luego dibujando los trece brownies y, por último, distribuyendo los brownies. Primero, Ash repartió brownies enteros hasta que quedó uno, y luego lo dividió en cuatro partes, obteniendo una respuesta de tres y un cuarto.

Daniel (Figura 12.3) comenzó dividiendo 12 entre 4 para obtener 3 como número de brownies enteros. A continuación, dividió el último brownie (en el centro de su hoja) en cuartos y repartió uno a cada persona. Se puede ver que parece saber que la última parte es $\frac{1}{4}$ por la imagen del medio, pero invierte (o transpone) la fracción cuando la escribe en los círculos como $\frac{4}{1}$. Las personas con dislexia o discalculia suelen informar de que invierten o escriben mal los dígitos; Edmund, en el capítulo 3, me contó que esto le ocurría con frecuencia cuando daba clases de matemáticas.

El trabajo de Kelani (Figura 12.4) incluye (y etiqueta) tres estrategias distintas (1-3). Su primera estrategia es similar a la de Ash y Daniel, en la que primero reparte brownies enteros. Su segunda estrategia me resulta misteriosa: me pregunto en qué 4 y en qué 3 está pensando cuando multiplica 4 por 3. Su tercera estrategia añade algo nuevo: divide cada brownie en cuartos y distribuye los cuartos. Aunque esto no aparece en su papel, empezó a hablar con sus compañeros de clase sobre cómo la respuesta podría ser $\frac{15}{4}$.

Después de unos 25 minutos, la Sra. Rey dirigió un intercambio que comenzó con Daniel. Él explicó su estrategia a la clase, mientras la Sra. Rey la dibujaba paso a paso en la pizarra. En varias ocasiones, se detuvo y pidió a los alumnos que se giraran y hablaran, preguntándoles si lo que habían hecho era similar o diferente a lo que había hecho Daniel, o que reformularan su estrategia.

La Sra. Rey presionó a Daniel, como hizo con todos sus alumnos, para que explicara su razonamiento, no solo para que diera una respuesta. Por ejemplo, hizo preguntas de seguimiento a los alumnos, como «¿Qué quieres decir con uno más?» y «Cuéntame tu

razonamiento... ¿cómo lo supiste?». Después de Daniel, Kelani compartió su respuesta. A continuación, el debate se centró en si $3 \frac{1}{4}$ era equivalente a $\frac{13}{4}$.

A medida que avanzaba el año, la Sra. Rey dio a sus alumnos muchas oportunidades para desarrollar sus conocimientos sobre fracciones, planteándoles situaciones de reparto cada vez más complejas (Empson y Levi, 2011). Unos meses más tarde, volví al aula para ver a los alumnos resolver el problema «Una lata de pintura pinta tres cuartos de una silla. Si tengo 12 latas de pintura, ¿cuántas sillas puedo pintar?» (quizás recuerdes este problema del capítulo 1; es el mismo que Sussan planteó a sus alumnos, sin el cuarto como opción numérica).

Estos problemas cumplían y superaban las expectativas del nivel de grado en cuanto a fracciones, pero como se encontraban en contextos que los alumnos comprendían, la mayoría de los días todos los alumnos los resolvían con éxito, y nuestro análisis del desarrollo de las estrategias de los alumnos reveló que estos habían mejorado considerablemente su comprensión de las fracciones a lo largo del año, incluidos los alumnos con discapacidades (Lambert et al., 2020).

Al mirar alrededor del aula, vi a alumnos que se escuchaban unos a otros y hablaban con cuidado, pero con pasión, sobre ideas matemáticas. Vi cómo se expresaban los desacuerdos y se respondía a ellos de forma reflexiva. Desde mi punto de vista como observador, esta clase parecía tener una comunidad matemática excepcionalmente fuerte. Sin embargo, como investigador, también necesitaba saber si los alumnos estaban de acuerdo. Realicé 12 entrevistas a alumnos de esa clase para conocer sus perspectivas. En esas entrevistas, pregunté a los alumnos si esta clase era diferente a sus clases de matemáticas anteriores y en qué se diferenciaba. Todos los alumnos dijeron que era diferente a las clases de matemáticas anteriores.

Cuando les pregunté en qué se diferenciaba, varios alumnos me dijeron que participaban mucho más en la clase de la Sra. Rey, especialmente en el grupo completo. Los alumnos me dijeron que, como a la Sra. Rey no le importaba si cometían errores, hablaban más en la clase de matemáticas. Cuando le pregunté a un niño por qué no había participado en clases anteriores, me respondió: «Porque pensaba en si iba a acertar o fallar el problema y creía que me iba a meter en problemas o algo así cuando fallaba los problemas». Otro dijo: «Nos hace sentir cómodos, más cómodos en clase, como si nos ayudara a ganar confianza para poder hablar, porque a algunas personas, cuando se equivocan, se ríen de ellas». Los alumnos también comentaron que la Sra. Rey les deja resolver los problemas «como quieran». ●

TIEMPO Y ESPACIO PARA EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO

Dediquemos un momento a reflexionar sobre lo que dicen estos alumnos. Quizás no parezca tan revolucionario que su profesora aceptara los errores. Pero es importante saber que los profesores anteriores a la Sra. Rey también eran buenos profesores. Sin duda, eran más tradicionales en su forma de enseñar matemáticas. Pero era una escuela amable con educadores maravillosos. No creo que esos otros profesores se enfadaran o se molestaran cuando un alumno daba una respuesta incorrecta. Entonces, ¿por qué los niños estaban convencidos de que esos profesores anteriores desaprobaban sus respuestas incorrectas? ¿Qué hizo la Sra. Rey de manera diferente?

Según las observaciones y entrevistas de nuestro equipo de investigación, estas son las tres medidas fundamentales que tomó la Sra. Rey (Lambert et al., 2020). Ella

Les dio tiempo y espacio a los alumnos para pensar matemáticamente.

Envió mensajes para ayudarles a replantearse las matemáticas, alejándose de las ideas rígidas de rápido/lento y correcto/incorrecto

Les comunicó que eran una comunidad matemática, que trabajaban juntos y daban sentido juntos.

En primer lugar, estableció las condiciones para que todos los alumnos pudieran pensar matemáticamente. Las actividades en el aula se centraban en la comprensión, día tras día. Después de un calentamiento de sentido numérico, la mayoría de los días les daba a los alumnos un problema narrativo para resolver. Al centrar el trabajo en la resolución de problemas reales, la Sra. Rey creó las condiciones para que los alumnos pensaran por sí mismos. También les transmitió su confianza en su forma de pensar, dándoles libertad para resolver los problemas de la manera que les pareciera más lógica, en lugar de imponerles su propia forma de pensar.

Reformular las matemáticas

En segundo lugar, enviaba mensajes contundentes a sus alumnos sobre lo que significa para ella hacer matemáticas. Se centraba especialmente en dos cosas:

Los errores son la forma en que aprendemos.

Las matemáticas pueden llevar más tiempo

En cuanto al primer mensaje, la Sra. Rey tenía una forma particular de responder cuando un alumno «revisaba su razonamiento». Uno de sus alumnos, Oscar, cometió un error durante un problema sobre fracciones, al contar mal una parte fraccionaria. La Sra. Rey se acercó, vio lo que había hecho y le preguntó si quería compartir «su cambio de razonamiento». Los alumnos a los que se les pedía que compartieran eran a menudo aquellos que habían cometido un error interesante. Era importante hablar de los errores y asegurarse de que los entendíamos. La Sra. Rey incluso preguntaba a los alumnos al final de la clase cuál era su «error favorito del día», el que les había ayudado a aprender algo nuevo. Cuando un alumno identificaba este entendimiento parcial, la Sra. Rey dibujaba un corazón junto a él.

Una de las razones por las que su estrategia funcionaba tan bien era que los alumnos de alto nivel aceptaban este enfoque de las matemáticas. Un día, en clase, Toby, un alumno negro que tenía las mejores notas en matemáticas de la clase, discutió con sus compañeros sobre la respuesta a un problema de división de fracciones. Estaba equivocado y, cuando le convencieron, sonrió y lo admitió. «He cambiado de opinión», dijo, y provocó las risas de la clase. El hecho de que Toby, muy respetado por su pensamiento matemático, fuera capaz de admitir sus errores parecía especialmente importante para sus compañeros.

La Sra. Rey también transmitió el mensaje de que las matemáticas requieren tiempo. Un día, los alumnos no estaban preparados para compartir sus ideas al final de la clase. Los envió al recreo diciéndoles que «los matemáticos no se precipitan, sino que son reflexivos». Les

transmitió el mensaje de que las buenas matemáticas requieren tiempo, relacionándolo con el trabajo de los matemáticos reales.

Estos mensajes llegaron a sus alumnos. Para los alumnos que entrevisté, estos dos mensajes estaban interconectados. Preocuparse por las respuestas incorrectas estaba relacionado (para ellos) con que se les pidiera responder rápidamente. El tiempo significaba una oportunidad para pensar detenidamente en un problema.

¿Importa cómo se sienten nuestros alumnos con respecto a las matemáticas? En nuestro trabajo como profesores, sabemos que los alumnos suelen esforzarse más en las materias que les interesan. Hay pruebas de estudios longitudinales que demuestran que el rendimiento se puede predecir no solo por los resultados anteriores, sino también por la actitud hacia las matemáticas (Hemmings et al., 2011). Un estudio reciente que utilizó imágenes cerebrales descubrió que, cuando se les pedía que realizaran cálculos matemáticos mentales mientras se les realizaba una resonancia magnética, los alumnos con menos habilidades matemáticas y una actitud positiva hacia las matemáticas mostraban una mayor actividad en el área del cerebro responsable de los cálculos matemáticos que los alumnos con menos habilidades matemáticas y una actitud negativa hacia las matemáticas (Demir-Lira et al., 2019). Los investigadores resumieron este estudio como una prueba de que los niños piensan más cuando les gustan las matemáticas que cuando no les gustan. Me alegro de que los neurocientíficos tengan datos que confirmen esta idea, pero creo que ya lo sabíamos. Importa si nos interesan las matemáticas. ¡Los niños piensan más cuando les interesa! Todos lo hacemos.

Comprender los aspectos emocionales y relacionales del aprendizaje es fundamental, ya que las emociones regulan todo el aprendizaje; aprendemos cuando las condiciones emocionales son adecuadas (Immordino-Yang y Damasio, 2007). Aunque debemos tener en cuenta las necesidades sociales y emocionales de todos los estudiantes, los estudiantes con discapacidades tienen una tasa más alta de discapacidades emocionales, como la ansiedad, que la población general. Por ejemplo, los estudiantes con discapacidades de aprendizaje (LD) que tienen objetivos en matemáticas sufren ansiedad matemática al doble de la tasa de la población estudiantil general (Devine et al., 2018). Un componente fundamental de las aulas de matemáticas seguras es una relación positiva con los profesores. Un estudio realizado en un centro de educación infantil reveló que los alumnos con LD y trastorno por déficit de atención con hiperactividad (TDAH) tenían relaciones más distantes con sus profesores y más conflictos (Demirkaya y Bakkaloglu, 2015).

Aunque debemos tener en cuenta las necesidades sociales y emocionales de todos los estudiantes, los estudiantes con discapacidades tienen una tasa más alta de discapacidades emocionales, como la ansiedad, que la población general.

[Desarrollar un sentido de comunidad matemática](#)

La Sra. Rey siempre dejaba que los alumnos trabajaran de la forma que mejor les funcionaba. Les dejaba resolver los problemas con sus compañeros o solos, según sus propias preferencias. Tampoco controlaba con quién hablaban; Toby se movía por el aula para trabajar con diferentes alumnos. No le pedía permiso a la Sra. Rey para hacerlo; parecía claro que ella les animaba a decidir por sí mismos con quién iban a hablar. Me llama la atención que rara vez haya visto esto en las clases de matemáticas. La mayoría de los días, solo unos pocos alumnos se movían para hablar con otras mesas. Un día que estuve observando, había tanto desacuerdo sobre la respuesta que, en el momento de compartir, más de la mitad de los alumnos estaban sentados en otro sitio, enfrascados en intensas conversaciones sobre la respuesta. La Sra. Rey les transmitía que confiaba en su capacidad de pensar y, por lo tanto, confiaba en que encontrarían al compañero de reflexión que necesitaban. Les transmitía que eran interdependientes en su aprendizaje, que no estaban solos.

También les comunicó que esas conversaciones eran fundamentales para su propio aprendizaje. Un día pidió a los alumnos que hablaran en sus mesas durante una puesta en común con todo el grupo. Animó a Oscar, que hablaba muy bajito cuando hablaba, a participar. Se alejó y, cuando volvió, vio que no todos los alumnos podían oír a Oscar. En lugar de pedirle a Oscar que hablara más alto, le preguntó a Kelani: «¿Puedes oír a Oscar?». Cuando Kelani negó con la cabeza, la Sra. Rey le preguntó: «¿Qué puedes hacer al respecto?». Kelani se levantó y se arrodilló junto a Oscar. Los demás alumnos de la mesa se inclinaron hacia delante. Oscar volvió a hablar, un poco más alto. En estos y otros momentos, la Sra. Rey transmitió el mensaje de que sus alumnos estaban allí para escucharse unos a otros.

DESARROLLAR EL PENSAMIENTO RELACIONAL CON FRACCIONES

Esta no es solo una historia sobre la comunidad matemática, sino que también nos permite debatir sobre una de las áreas más difíciles de la enseñanza de las matemáticas de K-8: ¡las fracciones! Se trata de un problema de reparto equitativo, que funciona de maravilla para ayudar a los alumnos a reflexionar sobre los complejos conceptos que subyacen a las fracciones.

¿Por qué son tan difíciles las fracciones? Una de las razones es la forma en que las introducimos. A menudo, se les dan a los alumnos imágenes estáticas que les llevan a pensar en una fracción de una sola manera, como parte de un todo visual (Empson y Levi, 2011). Los alumnos también deben comprender que una fracción es una relación entre el numerador y el denominador, una proporción y un problema de división. Cuando los estudiantes solo entienden las fracciones como imágenes estáticas (Figura 12.5), tienen dificultades a medida que su trabajo con fracciones se vuelve más complejo y más relacional. Los estudiantes necesitan ver la equivalencia entre diferentes representaciones visuales y simbólicas (Lamon, 2007). Los estudiantes necesitan desarrollar un pensamiento relacional sobre las fracciones, lo cual es muy necesario para pensar con suficiente flexibilidad sobre las fracciones y comprender todas estas diferentes formas (Empson y Levi, 2011).

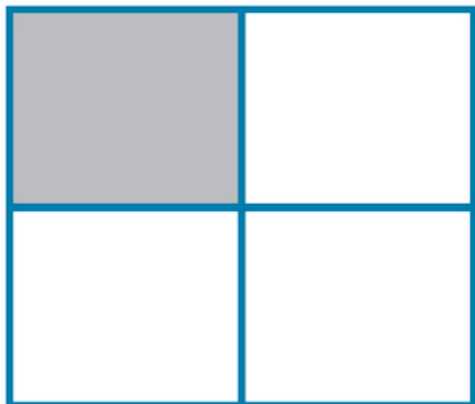


Figura 12.5 • Imagen introductoria típica de las fracciones

Cuando los estudiantes solo entienden las fracciones como imágenes estáticas, tienen dificultades a medida que su trabajo con fracciones se vuelve más complejo y más relacional.

La comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes se beneficia de las oportunidades de resolver problemas como el del brownie a través de la investigación guiada, dada la posibilidad de elegir cómo resolver el problema y el apoyo de preguntas y debates del profesor. Los estudiantes que participan en una investigación guiada sostenida con tareas de reparto equitativo como este problema del brownie desarrollan una sólida comprensión relacional de las fracciones, incluyendo la proporción y la relación entre la división y las fracciones (Empson y Levi, 2011). Los estudiantes con dificultades de aprendizaje que participan en trabajos de reparto equitativo desarrollan una comprensión de los conceptos subyacentes de las fracciones, el pensamiento relacional sobre las fracciones necesario para su comprensión (Hunt y Empson, 2014; Hunt et al., 2016; Hunt et al., 2019). Más información sobre este tipo de problema al final del capítulo (para más información, véase «Desentrañar una idea fundamental: desarrollar la comprensión de las fracciones a través de problemas narrativos» en la página 210).

CÓMO UTILIZAMOS LAS EXPERIENCIAS PARA FORMAR LA IDENTIDAD MATEMÁTICA

Entonces, ¿cómo afecta este tipo de comunidad matemática a la identidad de los estudiantes en matemáticas? La identidad matemática es un concepto complicado. Se puede simplificar en exceso y reducir a una identidad matemática positiva o negativa, pero es más que eso. Estoy seguro de que usted mismo tiene una relación con las matemáticas más complicada que simplemente positiva o negativa. Probablemente dependa del contexto, como le ocurre a la mayoría de las personas. Los investigadores tienden a considerar la identidad matemática como un proceso a través del cual todos damos sentido a nuestras experiencias con las matemáticas. Se crea en parte por nuestras experiencias con las matemáticas y en parte por cómo damos sentido a esas experiencias (Berry, 2008; Horn, 2008). Nuestras experiencias incluyen cómo nos sentimos en la clase de matemáticas. También incluyen cómo damos sentido a las experiencias en las que aprendemos si se nos considera buenos (o no) en

matemáticas. Todo ello forma parte de nuestras experiencias en la clase de matemáticas (véase la figura 12.6).

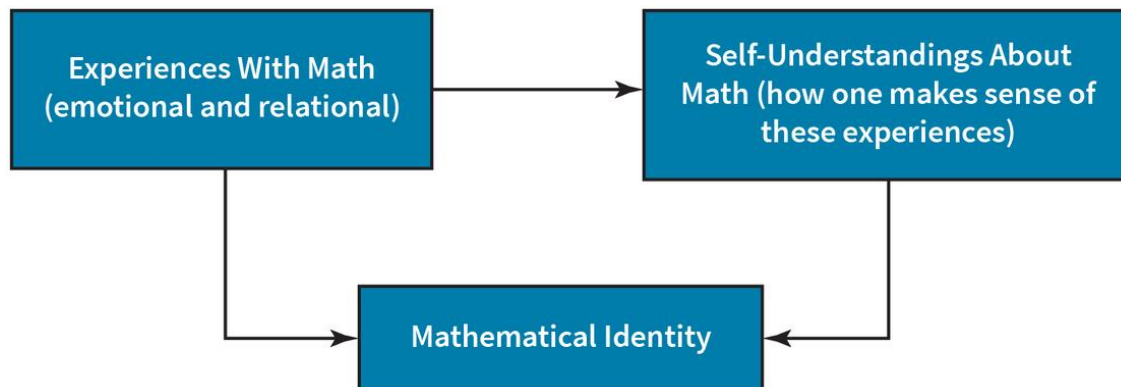


Figura 12.6 • El proceso de identidad matemática

La segunda parte también es muy importante: cómo interpretamos estas experiencias. Como profesores, transmitimos mensajes sobre lo que significa ser bueno en matemáticas. La Sra. Rey refutó explícitamente algunos de los mensajes más perjudiciales, como que ser bueno en matemáticas es ser rápido. En las entrevistas descubrimos que los alumnos aceptaban esos mensajes y los utilizaban para interpretar su propia identidad. Encontré lo mismo en los estudios sobre los alumnos de las clases de Luis (capítulo 2): escuchaban lo que sus profesores decían sobre quién podía ser bueno en matemáticas y sobre qué significaba ser bueno.

Son especialmente perjudiciales los estereotipos sobre las matemáticas relacionados con el género, la raza, la discapacidad y el idioma (Nasir et al., 2013). En nuestra cultura circulan estereotipos negativos sobre las matemáticas, que transmiten a los niños mensajes sobre quién puede ser bueno en matemáticas. Estos mensajes existen, y los niños difieren en cómo los aceptan o rechazan. Por ejemplo, uno puede oír que las niñas no son buenas en matemáticas, pero rechazar totalmente esa idea. También se puede rechazar ese estereotipo negativo, pero al mismo tiempo creer en él. En mi trabajo con la Sra. Márquez, descubrí que tanto los niños como las niñas aceptaban su lenguaje empoderador sobre el género y las matemáticas, ya que ella contrarrestaba explícitamente los estereotipos negativos sobre las niñas y las matemáticas.

También enviamos mensajes a los alumnos sobre quién creemos que es «bueno» en matemáticas a través de señales no verbales. Los alumnos prestan atención a cómo los agrupamos, así como a quién tiene acceso a qué tareas. En primavera, en la clase de séptimo curso de la Sra. Márquez, ella dividió a los alumnos en tres grupos por niveles que nunca se les explicaron. A pesar de su nota de sobresaliente en matemáticas, Rita fue colocada en lo que los niños llamaban el grupo «intermedio». Al final del año, le pregunté a Rita: «Si hay ciertos tipos de estudiantes de matemáticas, ¿de qué tipo eres tú?». Ella respondió: «Soy de nivel medio». Utilizó el nombre informal del grupo para dar a entender que, de alguna manera, estaba «en el medio» de los estudiantes de matemáticas, ni en la parte superior ni en la

inferior. ¡Los niños siempre están prestando atención! Esto debería recordarnos que nunca debemos nombrar a los alumnos con ideas sobre su grupo o estatus en matemáticas, como «niños bajos» o «niños altos».

También enviamos mensajes a los alumnos sobre quiénes creemos que son «buenos» en matemáticas a través de señales no verbales.

ACOGER LA NEURODIVERSIDAD

En el año de nuestro estudio, la Sra. Rey había pedido que dos alumnos con autismo, Oscar y Ash, fueran asignados a su clase a tiempo completo, a pesar de que habían estado en clases de educación especial separadas. En las entrevistas con la Sra. Rey, le pregunté cómo abordaba el trabajo con alumnos como Ash y Oscar. Su respuesta fue inmediata: conocerlos. Antes de que Oscar, un latino, entrara en su clase, la Sra. Rey habló con sus profesores de educación especial para averiguar qué le interesaba: los viajes espaciales. El primer día de quinto curso, lo llevó aparte y le enseñó algunos libros sobre el espacio. Oscar empezó entonces a traer libros para enseñárselos a la Sra. Rey (Figura 12.7). Su relación floreció a partir de ese momento.



Figura 12.7 • La Sra. Rey hablando con Oscar

Oscar no había hablado mucho en la escuela anteriormente. En su clase de cuarto grado, en la que había pasado algún tiempo en integración (cuando un niño de una clase de educación especial separada pasa algún tiempo en la educación general), no habló con la maestra ni siquiera en privado durante meses. Su IEP lo describía como «no verbal». Cuando la Sra. Rey me describió a Oscar, utilizó la palabra «tímido» en su lugar.

Oscar era muy trabajador en la clase de matemáticas. Según el análisis de los vídeos de su clase, Oscar solía ser el primero en empezar a trabajar en cada problema y el último en terminar. La mayoría de las veces era capaz de entender los problemas de fracciones utilizando el modelado directo, dibujando los problemas. Durante la primera mitad del año,

nuestro análisis detallado de la participación de los alumnos reveló que rara vez hablaba con otros alumnos durante las actividades en grupos pequeños y que no participaba en el grupo completo.

Ash, una niña de la clase con autismo, de origen asiático-americano y blanco, parecía lo contrario de Oscar. Mientras él era callado, ella era ruidosa. Ash interrumpía la clase a diario, a veces con sus respuestas a los problemas de matemáticas y otras veces cantando canciones de Disney. No dudaba en interrumpir la clase si creía que había un problema, como cuando sentía que un compañero de asiento estaba siendo «malo».

Mientras Oscar permanecía sentado durante toda la clase, Ash podía levantarse en cualquier momento si algo le despertaba la curiosidad. Más de una vez, se levantó para investigar las cámaras que utilizábamos para grabar la clase. En matemáticas, Ash tenía habilidades significativas que parecía disfrutar mostrando en clase. Sus habilidades computacionales estaban por encima del nivel de su curso, al igual que su comprensión de los temas conceptuales. Por ejemplo, utilizaba tablas de proporciones para resolver problemas de fracciones mucho antes que cualquiera de sus compañeros. La figura 12.8 muestra a Ash y Oscar en su mesa durante la clase de matemáticas.

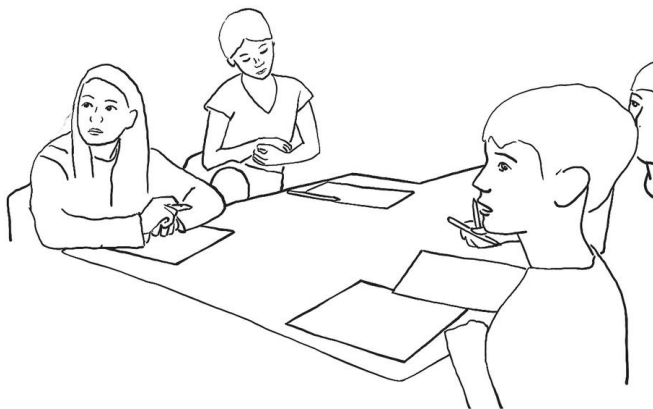


Figura 12.8 • Ash, en el centro, y Oscar, a la derecha, durante una lección

La Sra. Rey también utilizó intereses especiales para desarrollar su relación con Ash. Ash estaba particularmente interesada en Pokémon, por lo que la Sra. Rey se aseguraba de hablar del tema con ella. A Ash también le encantaban los gatos, por lo que la Sra. Rey (que tenía varios gatos) los utilizaba en problemas de historia, lo que parecía deleitar a Ash. Una vez vi a Kelani, que se sentaba al lado de Ash, reescribir un problema de historia para que tratara sobre gatos y así Ash se interesara. Funcionó. Este fue quizás mi momento favorito del estudio: ¡cuando vi que los niños también aprendían a adaptarse a sus amigos neurodiversos!

La Sra. Rey se aseguraba de reconocer a Ash por lo que sabía y podía compartir. La llamaba con frecuencia, lo que mantenía a Ash involucrada en la discusión matemática. Cuando Ash necesitaba alguna orientación en su comportamiento, la Sra. Rey utilizaba múltiples estrategias. La Sra. Rey podía acercarse a Ash, utilizando la proximidad como recordatorio. A veces ignoraba comportamientos que podía ignorar sin problema, una estrategia de educación

especial que me encanta llamada «ignorar de forma planificada». La Sra. Rey nunca le hablaba con dureza a Ash y se aseguraba de que los demás adultos también la trataran con respeto.

La Sra. Rey tenía una forma de conocer a sus alumnos que iba mucho más allá de los estereotipos sobre el autismo. Aprendió a conocer tanto a Ash como a Oscar como niños individuales, únicos e interesantes. Entendió que necesitaban cosas diferentes de ella para prosperar en su clase.

Sin duda, la Sra. Rey utilizaba las relaciones para involucrar a todos sus alumnos. Consideraba que las matemáticas eran relacionales y que el pensamiento matemático necesitaba un espacio emocional. Durante una entrevista final en el proyecto, me contó que, mientras pensaba en cómo adaptarse a los alumnos con discapacidades, recordaba su propia historia como estudiante en la escuela. La habían sacado de clase para recibir terapia del habla y tenía recuerdos muy intensos de la vergüenza que sentía por haber sido apartada. Para ella, incluir a todos los niños y asegurarse de que no sintieran esa vergüenza era fundamental en su práctica, en todas las materias. Para ella, esta forma emocional y relacional de enseñar parecía especialmente importante en matemáticas, quizás la materia más relacional y emocional que existe.

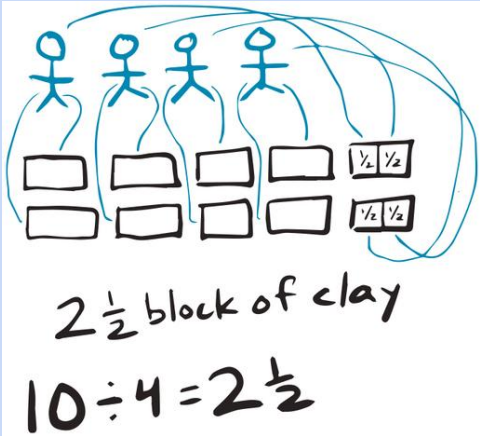
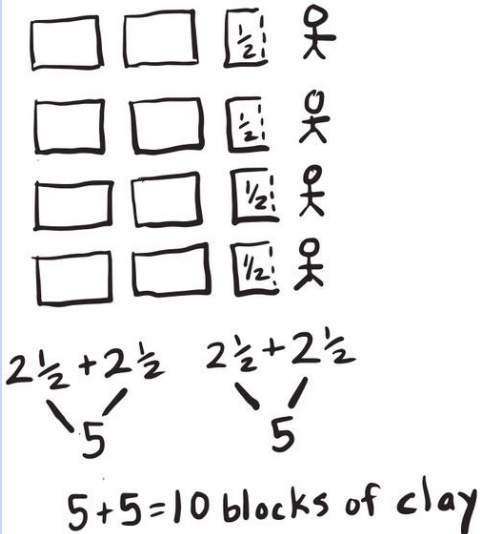
PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

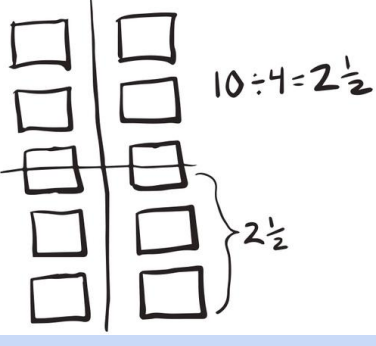
1. Si ha enseñado fracciones, ¿qué cree que resulta complicado para los alumnos? ¿Cómo ayuda a los alumnos a pensar de forma flexible sobre las fracciones?
2. ¿Tienes recuerdos de clases de matemáticas en las que te sentías más o menos cómodo compartiendo tus ideas? ¿Qué crees que era lo importante?
3. ¿Tienes experiencia en desarrollar relaciones con alumnos que necesitan más apoyo, como Ash y Oscar? ¿Qué te ha funcionado? ¿Qué podrías intentar de este capítulo?

Compromiso	Representación	Acción estratégica
Este capítulo se centra en cómo la Sra. Rey creó una comunidad matemática segura para todos los alumnos, incluyendo cómo dio prioridad a las relaciones. Trabajó para que los alumnos se sintieran seguros al asumir riesgos matemáticos.	Los estudiantes tenían la libertad de entender las fracciones de una manera que tuviera sentido para ellos. La Sra. Rey compartió entonces múltiples estrategias para involucrar a todos los estudiantes en múltiples representaciones.	La Sra. Rey dirigió un debate sobre la equivalencia en el que los alumnos (Daniel y Kelani) compararon sus estrategias. Este es un ejemplo de desarrollo intencionado del pensamiento estratégico en matemáticas. La Sra. Rey también desarrolló el pensamiento estratégico de los alumnos mediante preguntas intencionadas.

Desentrañar una idea fundamental: desarrollar la comprensión de las fracciones a través de problemas narrativos

Empson y Levi identificaron tres tipos de tareas de reparto equitativo en su libro de 2011 sobre la enseñanza guiada cognitivamente y las fracciones. Antes de leer la tabla 12.1, intente resolver los tres problemas de ejemplo utilizando dibujos para ver cómo los resuelve de forma diferente. ¿Qué ecuación escribiría para cada tipo?

Tipo de problema	Ejemplo de problema	Razonamiento del alumno con modelado directo
Problema de reparto equitativo (división partitiva)	La Dra. Lambert tiene 10 bloques de arcilla. Necesita repartir la arcilla entre 4 alumnos. ¿Cuántos bloques de arcilla recibirá cada alumno?	 <p>2 $\frac{1}{2}$ block of clay</p> $10 \div 4 = 2 \frac{1}{2}$
Problema de grupos múltiples (multiplicación)	La Dra. Lambert tiene 4 alumnos. Quiere dar a cada alumno 2 bloques y medio de arcilla. ¿Cuántos bloques de arcilla necesita?	 <p>2 $\frac{1}{2}$ + 2 $\frac{1}{2}$ 2 $\frac{1}{2}$ + 2 $\frac{1}{2}$</p> <p>5 5</p> <p>5 + 5 = 10 blocks of clay</p>

<p>Problema de grupos múltiples (división de medidas)</p>	<p>La Dra. Lambert tiene 10 bloques de arcilla. Quiere dar a cada alumno $2\frac{1}{2}$ bloques de arcilla. ¿A cuántos alumnos puede proporcionar arcilla?</p>	
--	---	--

Los alumnos suelen empezar cada tipo de problema modelándolo directamente. Cada vez que se introduce un nivel de complejidad, los alumnos pueden volver al modelado directo para entenderlo. El modelado directo es fundamental para garantizar que todos (incluidos los adultos) tengan acceso a las ideas complejas de las fracciones. Los alumnos acaban dividiendo el objeto compartido en el número de partes, como hizo Kelani. Por último, los alumnos desarrollan estrategias que utilizan el pensamiento relacional y/o la proporción para resolverlos. El uso de problemas narrativos también expondrá a los alumnos a operaciones con fracciones, como en el problema de las 12 sillas (capítulo 1), que era la división de un número entero por una fracción (12 dividido por $\frac{3}{4}$).

Más información:

Empson, S. B. y Levi, L. (2011). Ampliar las matemáticas de los niños: fracciones y decimales: innovaciones en la enseñanza guiada cognitivamente. Heinemann.

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 12.2 • Estrategia de Ash para el problema de los brownies

El problema de los brownies es el siguiente. Cuatro niños se reparten 13 brownies a partes iguales. ¿Cuánto brownies le toca a cada niño?

El dibujo muestra las cabezas de cuatro personas en fila en la parte superior de la página. Debajo de cada persona hay tres círculos que representan tres brownies. Una línea va desde cada persona hasta los tres círculos. Se muestra un círculo adicional dividido en cuatro cuadrantes. Una línea va desde cada persona hasta un cuarto del círculo. Cada persona tiene tres brownies y un cuarto.

Figura 12.3 • Estrategia de Daniel para el problema de los brownies

El problema de los brownies es el siguiente. Cuatro niños se reparten 13 brownies a partes iguales. ¿Cuánto brownies le toca a cada niño?

Hay cuatro círculos representados, con un rectángulo dividido en cuadrantes en el centro.

Cada círculo contiene cuatro rectángulos y la etiqueta 3 y 4 sobre 1.

Figura 12.4 • Estrategia de Kelani para el problema de los brownies

El problema de los brownies es el siguiente: cuatro niños se reparten 13 brownies a partes iguales. ¿Cuánto brownies le toca a cada niño?

La ilustración muestra tres estrategias.

La primera estrategia muestra 12 cuadrados etiquetados en secuencia de la A a la D y luego de nuevo de la A a la D, etc. El último cuadrado está dividido en 4 cuadrantes, cada uno de ellos etiquetado de la A a la D.

La segunda estrategia muestra las ecuaciones $4 \text{ por } 3 \text{ es igual a } 12$ por $4 \text{ por un cuarto es igual a } 4$ sobre $4 \text{ es igual a } 1$ entero.

La tercera estrategia muestra trece cuadrados, cada uno dividido en cuadrantes y etiquetados de la A a la D. Debajo de una casilla hay una flecha que apunta a un cuarto. La respuesta es 3 y un cuarto.

Figura 12.6 • El proceso de identidad matemática

El diagrama de flujo presenta tres elementos que interactúan entre sí. Uno de los elementos se denomina «Experiencias con las matemáticas». Estas pueden ser emocionales y relacionales. Una flecha conduce al siguiente elemento, que es «Autocomprensión de las matemáticas», y también conduce al tercer elemento. La autocomprensión de las matemáticas se refiere a cómo se interpretan estas experiencias. Una flecha conduce al siguiente elemento, que es la identidad matemática. El diagrama muestra que tanto las experiencias con las matemáticas como la autocomprensión de las matemáticas se relacionan con la identidad matemática.

Problema de reparto equitativo (división partitiva)

La ilustración muestra cuatro muñecos de palitos sobre dos filas de cinco rectángulos cada una. El último rectángulo de cada fila está dividido por la mitad. Las líneas conectan cada muñeco de palitos con los dos rectángulos que hay debajo de ellos, así como con uno de los dos rectángulos divididos por la mitad. La respuesta se muestra como dos bloques y medio de arcilla, lo que se representa con la ecuación $10 \text{ dividido por } 4 \text{ es igual a } 2 \text{ y medio}$.

Problema de grupos múltiples (multiplicación)

La ilustración muestra cuatro filas, cada una con dos rectángulos completos, medio rectángulo y un muñeco de palitos. La solución se muestra como $2 \text{ y medio más } 2 \text{ y medio es igual a } 5$, lo que se repite. La respuesta final es $5 \text{ más } 5 \text{ es igual a } 10$ bloques de arcilla.

Problema de grupos múltiples (división de medidas)

Se muestran cinco filas de dos cuadrados con una línea que separa los cuadrados en dos columnas y otra línea que separa los cuadrados en dos filas, con el par de cuadrados del medio cortado por la mitad. La parte inferior de la figura está entre corchetes y etiquetada como 2 y medio . La solución se escribe como $10 \text{ dividido por } 4 \text{ es igual a } 2 \text{ y medio}$.

CAPÍTULO 13 CONEXIÓN DE MÚLTIPLES REPRESENTACIONES

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Observaremos una clase de sexto grado realizando la rutina didáctica «Conectar representaciones».

Aprenderemos las características de las rutinas de enseñanza, diseñadas para alumnos con dificultades de aprendizaje (DA) y alumnos multilingües.

Explorar la importancia de conectar representaciones.

Aprender de las reflexiones de los estudiantes sobre las rutinas educativas.

KIT GOLAN (Figura 13.1) es un profesor de matemáticas de secundaria muy dinámico y animado. Como es habitual en los profesores de matemáticas de secundaria, Kit se dio cuenta de que a menudo dominaban la conversación en clase. Quería que sus alumnos hablaran más, pero se encontró con que siempre eran los mismos los que intervenían. Como educador con trastorno por déficit de atención e hiperactividad (TDAH), Kit es un apasionado de la creación de aulas que funcionen para todos los alumnos mediante el diseño desde los márgenes. Por eso, buscó formas de estructurar el debate de los alumnos para igualar la participación. Kit también razonó que, cuando él, como profesor, dominaba la conversación, era él quien pensaba en lugar de los alumnos. Kit quería desarrollar estructuras para que fueran los alumnos quienes realizaran el trabajo cognitivo, en lugar del profesor. Kit quería asegurarse de que las estructuras que estableciera sirvieran de apoyo a todos los alumnos. Fue entonces cuando las rutinas de enseñanza (Kelemanik et al., 2016) entraron en la vida de Kit. Cuando Kit descubrió las rutinas de enseñanza, sintió que podía proporcionar una estructura que favoreciera tanto la participación como el pensamiento mediante una estructura coherente y repetida.

³ Kit utiliza tanto los pronombres él/le como ellos/les. En este capítulo utilizaré ellos/les.



Figura 13.1 • Kit Golan, profesor de matemáticas de sexto grado

FUENTE: Kit Golan

Entremos en el aula de Kit para ver en acción la rutina de enseñanza de «Conectar representaciones». Su clase de sexto grado en la ciudad de Nueva York estaba compuesta principalmente por alumnos asiáticos y blancos, con un porcentaje menor de alumnos latinos y negros. Varios alumnos tenían programas de educación individualizada (IEP). La clase también contaba con varios alumnos multilingües, en su mayoría alumnos cuya lengua materna era el chino. La mayoría de los alumnos necesitaban más apoyo para participar en matemáticas, ¡un problema bastante común en la escuela secundaria! Kit llamó la atención de la clase y anunció que iban a realizar la rutina de enseñanza de conexión de representaciones (Kelemanik et al., 2016).

Kit comenzó la rutina dando a los alumnos un objetivo de práctica matemática. Kit dijo a los alumnos de sexto curso: «Hoy vamos a conectar líneas numéricas dobles con ecuaciones para que podamos pensar como lo hacen los matemáticos y utilizar la estructura matemática para conectar dos cosas que parecen diferentes».

A continuación, recordó brevemente a la clase los pasos de la rutina de enseñanza. A lo largo de esta rutina, Kit utilizó una presentación de Microsoft PowerPoint. En el sitio web *Fostering Math Practices* se pueden encontrar presentaciones similares de forma gratuita, que también incluyen tareas matemáticas para utilizar en las rutinas (<https://www.fosteringmathpractices.com/>). También puede obtener más información en la Guía de prácticas docentes en línea.



Guía de prácticas docentes en línea qrs.ly/l7f7rwq

A continuación, Kit planteó la tarea en la que iban a trabajar los alumnos.

Pruébalo

¿Qué representaciones de rectas numéricas (1 y 2) corresponden a qué ecuaciones (A, B y C)? ¿Cómo lo sabes?

1)



A) $3x = 6$

B) $6x = 12$

2)



C) $6x + 3 = 15$

¿Qué ecuación (A, B o C) no tiene una representación en la recta numérica? ¿Puedes intentar dibujar una recta numérica doble que coincida con esa ecuación?

Kit reveló dos carteles, uno a la vez: primero uno con las rectas numéricas dobles (1 y 2) y luego uno con las ecuaciones (A, B y C). Plantearon las siguientes preguntas a los alumnos:

«Pregúntate: "¿En qué se parecen/difieren las rectas numéricas?"».

«¿Cuáles son los TROZOS de estas rectas numéricas?».

«¿Cuáles son los TROZOS de estas ecuaciones?».

A continuación, Kit dio a los alumnos un tiempo para pensar individualmente y, tras un minuto aproximadamente, les pidió que se giraran y hablaran. Mientras los alumnos hablaban, mostró las siguientes frases iniciales en una diapositiva:

«Me di cuenta de que... así que relacioné...».

«... coincide con ... porque ...».

Mientras los alumnos conversaban por parejas, Kit circulaba entre ellos, escuchando lo que decían. Mientras escuchaban a los alumnos hablar, seleccionaron a dos parejas diferentes para compartir. Prepararon discretamente a esos alumnos para que practicara cómo compartir delante de la clase, permitiéndoles planificar y ensayar lo que dirían y harían.

Después de unos minutos, Kit reunió a la clase y pidió al primer par que compartiera sus ideas. El primer par se centró en la relación entre $6x$ y los 6 saltos equivalentes en ambas rectas numéricas. A continuación, los alumnos conectaron C con 1 debido a los 3 saltos adicionales, equivalentes a 3. El segundo par comenzó de otra manera, observando atentamente A y 1, la primera ecuación y la primera recta numérica. Aunque la primera recta numérica tenía saltos de 3, los grupos de 6 no tenían sentido en esa recta numérica porque se habían añadido, no se mostraban como equivalentes.

Mientras cada pareja compartía, un alumno hablaba y el otro utilizaba un puntero para mostrar a los demás alumnos lo que estaban explicando. Después de que cada pareja compartiera, Kit pidió a los alumnos de la clase que reformularan el razonamiento de la

pareja que había presentado. Kit apoyó esta charla compartiendo frases iniciales para las reformulaciones.

Después de que la segunda pareja compartiera, Kit agradeció a los presentadores y se colocó delante del papelógrafo. Cuando las parejas de alumnos estaban presentando, no se utilizó ningún marcador para representar su razonamiento. El puntero se utilizó para indicar de qué estaban hablando, pero sin hacer anotaciones. Sin embargo, después de las presentaciones, Kit anotó cuidadosamente el papelógrafo utilizando colores para hacer visibles las conexiones entre los fragmentos que los alumnos consideraban relacionados (como en las figuras 13.2 y 13.3).

A) $3x = 6$
B) $6x = 12$
C) $6x + 3 = 15$

Figura 13.2 • Anotaciones de Kit sobre las ecuaciones algebraicas

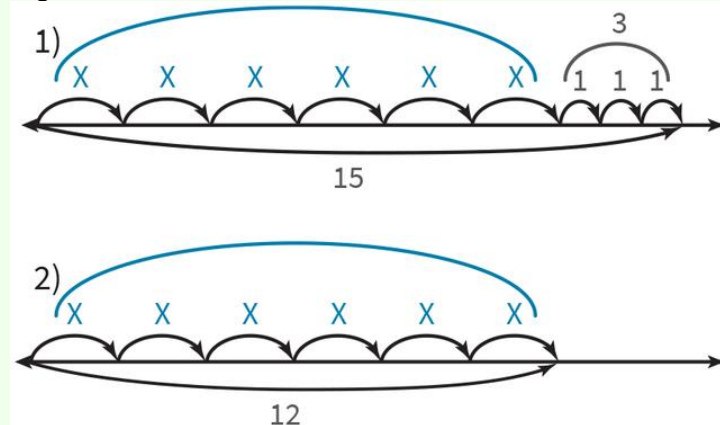


Figura 13.3 • Anotaciones de Kit sobre las líneas numéricas dobles

A continuación, Kit pidió a los alumnos que representaran en la doble recta numérica la ecuación sin representación (A. $3x = 6$). Aquí se muestra una recreación de uno de los dibujos de sus alumnos (figura 13.4).

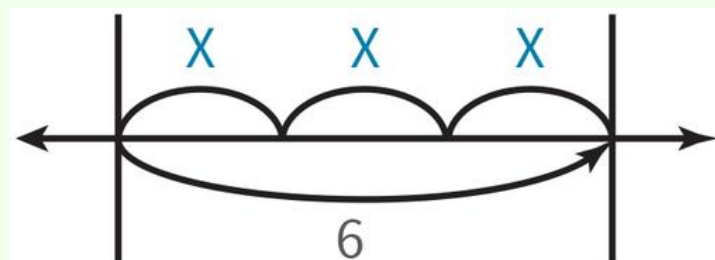


Figura 13.4 • Dibujo de un alumno de $3x = 6$ en una recta numérica doble.

La clase siguió la misma rutina dentro de una rutina: dos parejas de alumnos compartieron

sus dibujos, uno hablando y el otro utilizando un puntero. Kit dirigió a la clase para que reformularan y repitieran lo que habían hecho sus compañeros.

Finalmente, Kit terminó esta rutina como terminan todas las rutinas de instrucción, con una autorreflexión guiada, pidiendo a los alumnos que pensarán en las siguientes preguntas publicadas en una diapositiva:

Prestar atención a . . . en una ecuación o una recta numérica doble es útil porque . . .
Al interpretar una ecuación o una doble recta numérica, aprendí a preguntarme . . . ●

Rutinas de enseñanza

Las rutinas de instrucción (Kelemanik et al., 2016) son un conjunto de rutinas muy estructuradas diseñadas para ayudar a los alumnos con dificultades de aprendizaje y/o a los alumnos multilingües a participar en el pensamiento matemático. Como señalaron Kelemanik y sus colegas (2016), la práctica recomendada tanto para los alumnos multilingües como para los alumnos con dificultades de aprendizaje es

Uso de contextos auténticos

Uso de técnicas multimodales

Oportunidades enriquecedoras para el uso del lenguaje integradas en problemas matemáticos

Enseñanza que apoya el pensamiento abstracto en matemáticas.

Por lo tanto, diseñar a partir de estas dos recomendaciones beneficia a una amplia gama de estudiantes. En este punto del libro, muchos de los estudiantes con discapacidades que hemos conocido hasta ahora también son multilingües. Este es un ejemplo de cómo diseñar desde los márgenes puede beneficiar a todos, así como a los estudiantes que pueden estar marginados de múltiples maneras.

Las rutinas de instrucción están diseñadas específicamente para apoyar la participación de los estudiantes en las Normas de Práctica Matemática (SMP) o para permitirles participar en trabajos cognitivos complejos. Esta rutina está estructurada para apoyar a los estudiantes a participar en la SMP 7: Buscar y utilizar la estructura. Lo que conecta las líneas numéricas dobles con las ecuaciones es que ambas representan la misma estructura matemática, solo que en diferentes modalidades. Los estudiantes que vieron los saltos equivalentes de 6 en las dos rectas numéricas lo relacionaron con $6x$. Vieron los saltos en la recta numérica como un fragmento, como una unidad más pequeña que tenía significado matemático, y lo relacionaron con la representación simbólica que más sentido tenía. Kit lo dejó aún más claro cuando codificó con colores los fragmentos que los estudiantes veían en las representaciones.

Cada rutina de instrucción utiliza una estructura coherente con el objetivo de liberar los recursos mentales de los alumnos para que piensen matemáticamente en lugar de pensar: «Espera, ¿qué hago ahora?». Las características clave de cada rutina son

1. Articulación de un objetivo de práctica matemática

2. Problema matemático y tiempo de reflexión individual
3. Trabajo en pareja (con frases para iniciar la conversación)
4. Debate en grupo sobre las ideas con conexiones significativas entre las representaciones (y, a menudo, anotaciones del profesor).
5. Reflexión individual sobre el objetivo de la práctica matemática

En nuestra entrevista, Kit destacó la importancia del coaching estratégico en turnos y conversaciones. Me contaron que, antes de empezar con estas rutinas, les decían a los alumnos de secundaria que se giraran y hablaran. Los alumnos se giraban unos hacia otros y hablaban al mismo tiempo. Kit consideraba que los alumnos necesitaban un coaching más explícito sobre cómo comunicarse en matemáticas. El uso de estructuras de frases era fundamental para ayudar a los alumnos que se sentían nerviosos por no saber qué decir, así como a los que tenían dificultades para empezar. También ayudan a los alumnos que tienen dificultades con las señales sociales. Kit también compartió cómo el apoyo de las estructuras de frases les ayuda como alumnos con TDAH. Señalaron que, al tener una combinación de TDAH y tendencias perfeccionistas, a veces les resulta imposible empezar, incluso con solo decir una frase sobre un problema matemático. Una estructura de frases puede darles permiso para empezar y ayudarles a saber que van por el buen camino.

Las conversaciones en pareja son una de las cinco estrategias esenciales (Tabla 13.1) integradas en las rutinas de enseñanza. Estas estrategias están respaldadas por la investigación y son elementos fundamentales de toda enseñanza de las matemáticas.

FUENTE: Estrategias esenciales de Kelemanik y Lucenta (2022).

Estrategias esenciales	Descripción	Cómo utiliza Kit esta estrategia
Anotación	El profesor representa visualmente el pensamiento verbalizado por el alumno.	Kit utiliza colores para representar la descripción verbal de los alumnos sobre cómo relacionaron las ecuaciones con las rectas numéricas.
Preguntas para reflexionar	Indicaciones diseñadas para que los alumnos piensen metacognitivamente sin dictar un proceso o estrategia concretos.	Kit pregunta a los alumnos: «Pregúntate: "¿En qué se parecen/difieren las rectas numéricas?"».
Las cuatro R (repetir, reformular, redactar y registrar)	Técnicas de enseñanza que favorecen la conversación matemática entre los alumnos. Repetir: el profesor pide a un alumno que repita exactamente la idea de otro	Kit pidió a los alumnos que repitieran y reformularan las ideas que habían compartido sus compañeros delante de la clase. También reformularon las estrategias de los alumnos al anotar las rectas numéricas y las ecuaciones.

	<p>alumno.</p> <p>Reformular: el profesor pide a un alumno que exprese la idea del alumno de una forma ligeramente diferente.</p> <p>Reformular: el profesor reformula la idea del alumno.</p> <p>Registrar: el profesor escribe el lenguaje del alumno.</p>	
Iniciadores y estructuras de frases	El profesor proporciona parte de una respuesta para ayudar a los alumnos a encontrar las palabras adecuadas para expresar lo que quieren decir.	<p>Mientras las parejas de alumnos trabajaban, Kit mostraba</p> <p>«Me di cuenta de que... así que conecté...».</p> <p>«... coincide con... porque...».</p>
Girar y hablar	<p>Girar y hablar</p> <p>Se pide a los alumnos que se giren y hablen con un compañero.</p>	Kit comenzó con un tiempo de reflexión individual y luego hizo que los alumnos trabajaran en parejas. Durante el intercambio con todo el grupo, hace que los alumnos se giren y hablen cada vez que surge una idea matemática interesante que procesar.

Comprender cómo funcionan las variables

Kit no solo pensaba en la participación de los alumnos, sino que también reflexionaba profundamente sobre las matemáticas que enseñaba. Cuando los alumnos de sexto grado comienzan a trabajar con variables, a menudo no entienden lo que significa la variable o que $6x$ significa seis grupos de x (sea lo que sea x). La representación algebraica de $6x + 3 = 15$ es abstracta para los alumnos, completamente simbólica. Esta desconexión entre los símbolos y el sentido puede crear años de confusión con el álgebra, a menos que se aborde a través de experiencias significativas (para más información, véase «Desentrañar una idea fundamental: el pensamiento algebraico I» en la página 224).

Para ayudar a los alumnos a comprender cómo funciona la variable, Kit utilizó líneas numéricas dobles, una estrategia para representar las variables como saltos en una línea numérica desarrollada por Cathy Fosnot y Bill Jacob (2010). Especialmente para los alumnos que ya han trabajado mucho con líneas numéricas para operaciones con números enteros, las líneas numéricas dobles pueden ayudarles a resolver ecuaciones, ya que pueden ver las

relaciones entre las cantidades y las equivalencias. Este desarrollo intencionado de un modelo como herramienta para el pensamiento proviene de la investigación en educación matemática realista (RME), centrada en ayudar a los alumnos no solo a comprender modelos matemáticos concretos, sino también a interiorizarlos para que se conviertan en una herramienta para el pensamiento (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Esta representación de variables en rectas numéricas puede ser nueva para usted. Cuando las vi por primera vez, quería que los saltos de x fueran de alguna manera completamente diferentes a los saltos en los que se conoce el valor (como los saltos de 1). Pero después de haber trabajado con esta representación, veo cómo concreta el número de saltos, así como la equivalencia. ¿Te has dado cuenta de que los mismos dos números (3 y 6) se repetían en las ecuaciones? Kit lo hizo intencionadamente para que los alumnos no pudieran «aprovecharse» del 3 o del 6, ya que esos mismos números se repiten en varias ecuaciones. Debido a la elección de números de Kit, los alumnos deben entender la diferencia entre un 6 como número entero y 6 grupos de la variable x . Kit también diseñó la tarea para que los alumnos vieran la diferencia entre $6x$ y $6x + 3$ y pudieran pensar en las diferencias entre un número conocido (3) y una variable (x).

La importancia de conectar representaciones

Las matemáticas son fundamentalmente multimodales. Las matemáticas tratan sobre cómo funcionan los números y el espacio. Muchos de los problemas más difíciles de las matemáticas a nivel de investigación se centran en la representación de los números en el espacio, por ejemplo, el espacio tridimensional. El Diseño Universal para el Aprendizaje (UDL) aboga por el uso de múltiples modalidades para apoyar el aprendizaje de los alumnos en todas las áreas de contenido. He defendido que la multimodalidad es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, por lo tanto, es especialmente importante. A pesar de esta importancia, a los estudiantes les puede resultar muy difícil comprender las representaciones matemáticas y cómo se conectan las representaciones numéricas, simbólicas y visuales. Los niños que aprenden a contar necesitan conectar una cantidad de objetos con un número. Aprender a sumar significa tanto comprender la acción natural de combinar dos cantidades como saber representar esa acción como $a + b = c$. Por lo tanto, apreciar cómo la rutina de instrucción de conexión de representaciones aborda directamente este problema pedagógico.

Las matemáticas son fundamentalmente multimodales. Las matemáticas tratan sobre cómo funcionan los números y el espacio.

Pero este enfoque no es la única forma de ayudar a los alumnos a ver las conexiones entre las representaciones. Yo diría que, hasta ahora, en este libro hemos visto tres enfoques diferentes, pero complementarios, para abordar este problema. En la tradición de la enseñanza guiada cognitivamente (CGI), los niños comienzan en el ámbito visual utilizando problemas narrativos (Carpenter et al., 2015). Los estudiantes comienzan con dibujos y manipulativos, ya sea resolviendo cuántos malvaviscos se añadieron a una taza de chocolate caliente o cuánto recibirá cada niño si 4 niños se reparten 13 brownies. Como los estudiantes comienzan dibujando sus propias representaciones para resolver problemas, comprenderán esas representaciones. La comprensión de representaciones más abstractas, como las ecuaciones, suele llegar más tarde. A los estudiantes que pueden modelar directamente un

problema matemático se les puede animar a escribir una ecuación para describirlo, pasando de una representación matemática a otra. Recomiendo este enfoque para los alumnos que están aprendiendo un tema nuevo, ya que ellos controlan qué representaciones quieren utilizar.

Un segundo enfoque, más estructurado, proviene de la educación matemática realista (RME). En el capítulo 9, detallé cómo Dina diseñó una secuencia de actividades utilizando la teoría RME de modelos matemáticos para ayudar a todos sus alumnos a construir la comprensión de la recta numérica. El proceso comienza con los alumnos resolviendo problemas en un contexto de la vida real que se presta al modelo y, a continuación, el profesor utiliza el modelo para representar visualmente las estrategias de los alumnos. Por último, los alumnos deben adoptar el modelo como herramienta para pensar, tal y como hizo Jeremy con las torres (matrices) para la multiplicación en el capítulo 10. Este enfoque funciona bien cuando un modelo matemático es especialmente importante en matemáticas (como las rectas numéricas y las matrices) y puede resultar confuso para los alumnos al principio, por lo que es poco probable que lo utilicen para resolver problemas sin un empujón.

Conectar representaciones aborda el problema de una manera diferente. Esta rutina enseña a los alumnos a analizar dos tipos de representaciones para ver cómo funcionan. Este enfoque es especialmente útil a medida que avanzamos hacia el álgebra, donde los alumnos necesitan pasar de ecuaciones a situaciones concretas, gráficos, funciones y otras representaciones. Esta práctica escalonada de ver la estructura y hacer uso de ella (SMP 7) es especialmente valiosa a medida que avanzan en matemáticas.

CONEXIONES CON LA PEDAGOGÍA

Quizás hayas notado que esta rutina de enseñanza está más estructurada que cualquier otra que haya compartido hasta ahora en el libro. Entonces, ¿esta rutina de enseñanza es una instrucción explícita? Doabler y Fien (2013) definieron la instrucción explícita como aquella que tiene las siguientes características:

- a. el profesor modela un nuevo concepto o habilidad,
- b. el profesor ofrece oportunidades de práctica guiada,
- c. el profesor comprueba la comprensión de los alumnos,
- d. el profesor proporciona comentarios académicos, y
- e. los alumnos realizan prácticas independientes.

¿Qué elementos de esta rutina ves en la enseñanza de Kit? Veo todos los elementos excepto el primero. Kit estructura todo, excepto que no les dice a los alumnos cómo resolver este problema complejo. Kit no solo estructura la actividad para que los alumnos tengan que hablar, ¡sino que también tienen que pensar! Considero que las rutinas de instrucción son un desarrollo de estrategias guiadas, en las que el pensamiento de los alumnos está muy estructurado, pero los alumnos siguen siendo libres de pensar. De hecho, ¡la estructura en sí misma está diseñada para apoyar el pensamiento de los alumnos!

REFLEXIONES DE LOS ESTUDIANTES SOBRE LAS RUTINAS

Kit preguntó a los alumnos de su clase de ese año qué opinaban sobre las rutinas de enseñanza, concretamente sobre la conexión de representaciones. Estas son algunas de las respuestas de los alumnos:

«Hablamos mucho con nuestros compañeros y ellos me ayudan a detectar mis errores en los problemas, algo que no solía hacer en la escuela primaria».

«Me gusta que, en lugar de tener la cabeza mirando al profesor, la tengamos mirando a los demás. Me sentí muy bien».

«El Sr. Golan no habla durante toda la clase como otros profesores».

«La estrategia de emparejar A con B, hablar y reflexionar me ayudó a aprender porque me ayudó a utilizar el aprendizaje visual y todo se explica muchas veces».

«Me ayudó a comprender las cosas y a desglosar las más difíciles».

Estas reflexiones de los alumnos son increíbles. Demuestran que la estrategia de Kit tuvo éxito entre los expertos más importantes: los niños. Uno de los alumnos incluso validó la estrategia de Kit de descentrar su propia intervención, señalando que Kit no habla durante toda la clase, como otros profesores. Lo que más me llama la atención es el alumno que reflexiona sobre la importancia de que las cabezas estén orientadas hacia los demás alumnos, y no hacia el profesor, diciendo: «Me sentí muy bien».

Al reflexionar sobre esta rutina, a Kit le encantó cómo la conversación en el aula pasó de ser principalmente del profesor a ser principalmente de los alumnos. Estructurar la conversación en pequeños segmentos fue útil, ya que los niños escuchan un poco, hablan un poco, crean algo y luego vuelven a hablar. Kit me dijo: «No hay un gran lapso de tiempo en el que los alumnos tengan la oportunidad de distraerse o quedarse atrás con respecto a los demás, ¿verdad? Porque todos estamos haciendo más o menos lo mismo. Pero es en estos momentos estructurados y más pequeños». Este tipo de estructura es diferente de la indagación guiada, como en el aula de la Sra. Rey (capítulo 12), donde los alumnos toman la mayoría de las decisiones sobre cómo participar. Aprender las estructuras de las rutinas de instrucción nos da más opciones en nuestras herramientas pedagógicas.

Estructurar la charla en pequeños segmentos fue útil, ya que los niños escuchan un poco, hablan un poco, crean algo y luego vuelven a hablar.

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Qué observas y qué te preguntas sobre esta rutina de instrucción? ¿Qué le preguntarías a Kit si estuviera aquí?
2. Esta rutina tiene mucha estructura para apoyar la discusión de los alumnos. ¿Cómo podría beneficiar eso a los alumnos que necesitan apoyo con el lenguaje?
3. ¿Has visto a alumnos tener dificultades para conectar diferentes representaciones? ¿Qué representaciones parecen difíciles para los alumnos?

Participación	Representación	Acción estratégica
Kit está diseñando para aumentar la participación de los alumnos en las conversaciones matemáticas y la resolución de problemas. Estructuran la conversación con tiempo para pensar individualmente, turnos de conversación y compartición estructurada con todo el grupo. También proporcionan apoyo lingüístico, como estructuras de frases.	Esta rutina de instrucción está diseñada para que los alumnos desarrollen una sólida comprensión de cómo se relacionan las representaciones matemáticas.	Se pide a los alumnos que reflexionen sobre sus propios conocimientos y que desarrollen el hábito de hacerse preguntas a sí mismos, lo que puede desarrollar su metacognición.

Desentrañar una idea fundamental: el pensamiento algebraico I

El álgebra se ha descrito a menudo como aritmética generalizada. Nos permite generalizar a $x \times b = b \times x$, si ya entendemos que $5 \times 3 = 3 \times 5$ (la propiedad conmutativa de la multiplicación). Todo el trabajo que invertimos en que los alumnos comprendan las múltiples formas de realizar cálculos con números enteros puede aprovecharse para desarrollar una sólida comprensión de cómo funciona el álgebra. Podemos empezar muy pronto a discutir este tipo de ideas con los alumnos de primaria. Cuando los alumnos plantean conjeturas matemáticas, como «cualquier número multiplicado por uno es lo mismo», podemos explorar sus ideas y nombrarlas (la propiedad identitaria de la multiplicación). Este tipo de generalizaciones preparan a los alumnos para el pensamiento algebraico. También los prepara para formular y respaldar conjeturas (una hipótesis matemática), uno de los Estándares de Práctica Matemática (SMP2).

El pensamiento algebraico puede fomentarse en los cursos de primaria mediante tareas abiertas que permitan a los alumnos descomponer y recomponer números. En el problema de los mosaicos que resolvieron los alumnos de segundo curso en el capítulo 6, los alumnos tuvieron que determinar múltiples formas de cubrir el marco con mosaicos, lo que incluía pensar en la equivalencia y el signo igual. ¡Esto es un problema de álgebra!

Una de las cosas más complicadas del álgebra son los símbolos abstractos, en particular el concepto de variables y el signo igual. Los alumnos suelen pensar que el signo igual significa «la respuesta viene a continuación», y no que representa la igualdad en cantidad en ambos lados. Los alumnos pueden explorar problemas como $4 + 5 = b + 6$, lo que puede ayudarles a desarrollar una comprensión más sólida del signo igual como significado de equivalencia, y no como «la respuesta viene a continuación» (Carpenter et al., 2003). También puede desarrollar el pensamiento relacional, cuando los estudiantes utilizan lo que saben sobre los números para encontrar la respuesta a b ; por ejemplo, un estudiante puede darse cuenta de que 6 es uno más que 5, por lo que b debe ser uno menos que 4. Los estudiantes con dificultades de aprendizaje de un tercer grado fueron capaces de desarrollar y expresar su

pensamiento relacional sobre el signo igual después de una exposición constante a este tipo de problemas (Foote y Lambert, 2011). En esta lección, Kit utiliza líneas numéricas dobles para ayudar a los alumnos a ver la equivalencia en las ecuaciones (Fosnot y Jacob, 2010). Otros métodos son los modelos de equilibrio y las fichas de álgebra.

Las variables son extremadamente complicadas. Cuando enseñamos a los alumnos estos símbolos de formas que no conectan con la vida real y/o las representaciones, las matemáticas empiezan a perder sentido para ellos. Los alumnos suelen pensar que las variables ocupan el lugar de un número, no de CUALQUIER número (Van de Walle, et al., 2017). Este concepto de variabilidad cobra especial importancia cuando los alumnos llegan a representar gráficamente ecuaciones y la línea representa todos los valores posibles. Los alumnos que pueden tardar más en comprender las ideas abstractas deben tener muchas oportunidades para desarrollar su comprensión de las variables a través de múltiples representaciones visuales, como hace Kit aquí.

Más información:

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). Pensar matemáticamente: integrar la aritmética y el álgebra en la escuela primaria. Heinemann.

Foote, M. Q. y Lambert, R. (2011). Tengo una solución que compartir: aprender mediante la participación equitativa en una clase de matemáticas. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 11(3), 247-260.
<https://doi.org/10.1080/14926156.2011.595882>

Fosnot, C. T. y Jacob, B. (2010). Jóvenes matemáticos en acción: Construyendo álgebra. Heinemann.

Van de Walle, J., Bay-Williams, J., Lovin, L. y Karp, K. (2017). Enseñar matemáticas centradas en el alumno: instrucción adecuada al desarrollo para los grados 6-8 (3.^a ed.). Pearson.

Descripciones de imágenes y figuras

Ecuaciones/Representaciones en la recta numérica

La pregunta es: ¿Qué representaciones de la recta numérica, 1 y 2, corresponden a las ecuaciones A, B y C? ¿Cómo lo sabes?

Las tres ecuaciones son las siguientes.

Ecuación A. $3X$ es igual a 6.

Ecuación B. $6X$ es igual a 12.

Ecuación C. $6X$ más 3 es igual a 15.

Las dos rectas numéricas se presentan de la siguiente manera.

Recta numérica 1. Esta recta numérica presenta 6 saltos largos y 3 saltos cortos.

Recta numérica 2. Esta recta numérica presenta 6 saltos largos.

Figura 13.2 • Anotaciones de Kit sobre las ecuaciones algebraicas

Las ecuaciones algebraicas están anotadas de la siguiente manera.

Ecuación A. $3X$ es igual a 6. Esta ecuación no está anotada.

Ecuación B. $6X$ es igual a 12. El $6X$ está marcado con un círculo azul. El 12 está marcado con un círculo negro.

Ecuación C. $6X + 3$ es igual a 15. El $6X$ está marcado con un círculo azul. Los números 3 y 12 están marcados con un círculo negro.

Figura 13.3 • Anotaciones de Kit en las líneas numéricas dobles

Las dos rectas numéricas horizontales se presentan de la siguiente manera.

Recta numérica 1. Esta recta numérica presenta 6 saltos largos y 3 saltos cortos. Cada salto largo está etiquetado con una X. Cada salto corto está etiquetado con un 1. Los 3 saltos cortos suman 3. El total es 15.

Recta numérica 2. Esta recta numérica presenta 6 saltos largos. Cada salto largo está etiquetado con una X. El total es 12.

CAPÍTULO 14 REPENSAR LA EVALUACIÓN PARA LA EQUIDAD

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

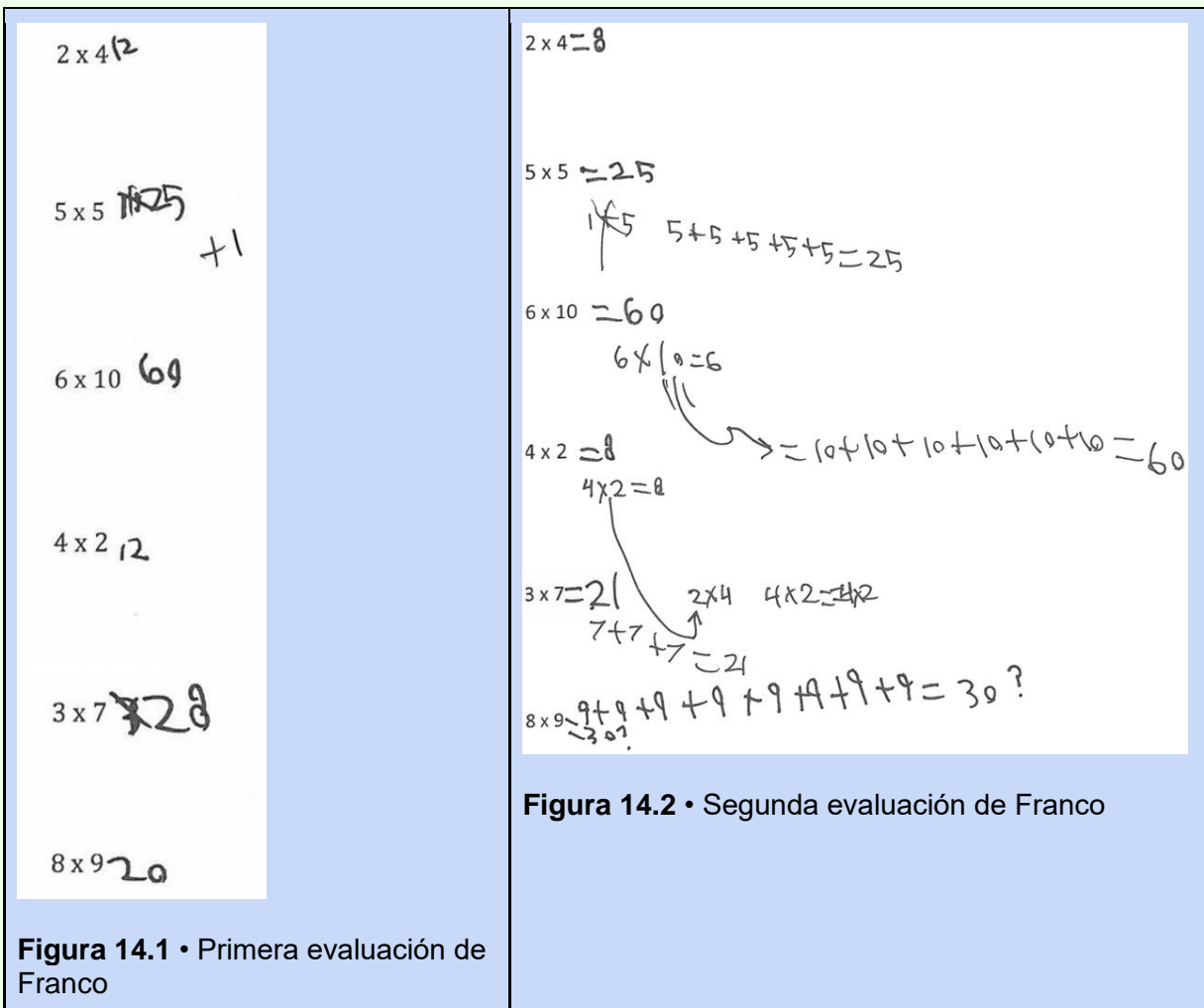
Visitaré a mi grupo de intervención en multiplicación mientras implemento la evaluación dinámica

Seguiré a un profesor de matemáticas de secundaria mientras rediseña la evaluación en su aula inclusiva.

Explorar cómo utilizar la evaluación para comprender mejor a los alumnos complejos, así como para ayudar a los alumnos a comprenderse mejor a sí mismos

EN MI INTERVENCIÓN con Franco y Jeremy, alumnos de cuarto y quinto curso que necesitaban apoyo adicional en multiplicación (**capítulo 10**), trabajamos con torres de cubos conectados para representar la multiplicación. Después de unas cuantas sesiones, me sentí tan segura de que habían progresado en la comprensión de la multiplicación que decidí hacerles una segunda evaluación utilizando los mismos primeros problemas que en la primera evaluación. En esa primera evaluación, Jeremy no había resuelto ningún problema y Franco había resuelto uno (5×5). Ninguno de los dos había mostrado ningún trabajo escrito. Pero ahora sentía que ambos lo harían muy bien utilizando sus nuevas estrategias de contar saltando y suma repetida.

Cuando los chicos comenzaron la evaluación, observé a Franco. Sonreí cuando utilizó la suma repetida para resolver varios problemas que no había resuelto la primera vez. Pasó de acertar 1 de 6 en la primera evaluación a acertar 5 de 6 en la segunda. Y lo que es más importante, pasó de dar respuestas sin mostrar su trabajo escrito a mostrar su razonamiento matemático. Resolvió 5 de 6 problemas, e incluso su respuesta incorrecta tenía una estrategia válida; simplemente se le había ido la cuenta. Las figuras 14.1 y 14.2 muestran la primera y la segunda evaluación de Franco.



Satisfecho, me volví para mirar a Jeremy e inmediatamente me preocupé. Jeremy, que normalmente era jovial y relajado, parecía increíblemente tenso. Sus piernas temblaban y su rostro parecía muy estresado. Me acerqué y me arrodillé a su lado. Vi que había escrito la respuesta correcta a la primera (2×4), pero nada más.

Le pregunté si quería dibujar algo; negó con la cabeza. Le pregunté si quería usar los dedos; negó con la cabeza. Le pregunté si quería usar bloques y, de nuevo, dijo que no. Me sentí frustrado. Entendí que los chicos necesitaban un apoyo adicional. Vi que necesitaban un apoyo adicional.

Piénsalo

Entonces, ¿qué sabe Jeremy sobre la multiplicación? ¿Qué te hace pensar esta historia sobre la evaluación?

El propósito de la evaluación es que aprendamos lo que los niños saben, en lugar de lo que no saben. Imagina que le informo a la maestra de Jeremy. ¿Qué le resulta más útil? ¿Si le digo que solo acertó una o que acertó 5 de 6 cuando se le dieron bloques? La segunda opción es mucho más útil porque ahora ella sabe cómo apoyarlo. Sabe que él comprende el concepto básico de la multiplicación y que puede hacerlo cuando se le apoya con bloques (ver **Figura 14.6**).

En este capítulo, exploraremos la evaluación. La evaluación es una barrera importante para los estudiantes discapacitados y neurodiversos en matemáticas. En mis entrevistas, la evaluación surge una y otra vez como un aspecto que estresa a los estudiantes (¡y a los profesores!). En mi investigación en el aula de Luis en el capítulo 2, cuando pregunté a los estudiantes por un momento en el que las matemáticas les resultaran difíciles, 5 de los 9 estudiantes mencionaron la ansiedad que les provocaban los exámenes. Los estudiantes me contaron cómo se sentían al hacer un examen de matemáticas:

«Lo entendería, pero me pongo muy nerviosa y se me olvida algo... Porque cuando estás nerviosa, se te olvidan cosas... Es como: "Debería saber esto, espera, se me ha olvidado, ¿debería recordarlo? Me pongo muy nerviosa"». (Ana)

«Por alguna razón, en los exámenes tiendo a entrar en pánico y, si estudio algo, me quedo en blanco. Por eso no me va bien en los exámenes». (Desi)

Estas dos alumnas, ambas con un Programa de Educación Individualizado (IEP) por una discapacidad de aprendizaje, describen el proceso de forma muy similar. Este proceso comienza con estrés, pánico y nerviosismo. Cuando sientes esas cosas, te olvidas o «te quedas en blanco». Este proceso es muy similar al proceso hipotético que subyace a la ansiedad matemática (Ashcraft y Moore, 2009). Ashcraft y Moore propusieron que cuando una persona con ansiedad matemática resuelve un problema matemático, especialmente en condiciones de estrés, la ansiedad interfiere con la memoria de trabajo, que es necesaria para resolver problemas matemáticos. Estos autores propusieron que esto lleva a los niños a rendir por debajo de lo esperado en los exámenes de matemáticas debido a lo que denominan la caída afectiva (Ashcraft y Moore, 2009).

Ashcraft y Moore propusieron que cuando una persona con ansiedad matemática resuelve un problema matemático, especialmente en condiciones estresantes, la ansiedad interfiere con la memoria de trabajo, que es necesaria para resolver problemas matemáticos.

Me llama la atención que Ana empiece con «Yo lo entendería». Esta chica hace una afirmación audaz: sabe matemáticas, pero la situación de la prueba no le permite demostrar lo que sabe. Esta afirmación me recuerda a Jeremy, con las piernas temblando, mirando fijamente la evaluación, casi en blanco. La cuestión no es si estos estudiantes entienden las matemáticas, sino cómo se sienten con respecto a la evaluación. Se espera que los estudiantes recuerden en una situación en la que sienten ansiedad y estrés. Sienten ese estrés porque sacar buenas notas en los exámenes ES importante para ellos. Y ese nivel de ansiedad afecta directamente a su capacidad para demostrar lo que saben.

Parece que tenemos una visión de la evaluación como algo que siempre evalúa al individuo por sí solo, sin apoyos, como si lo que podemos hacer solos, sin herramientas, fuera lo que importa. La evaluación dinámica es un tipo de evaluación más flexible que nos permite adaptar las evaluaciones para mostrar con mayor precisión lo que los niños saben cuando utilizan herramientas e interactúan con otros (Vygotsky, 1978). Estas adaptaciones pueden variar, desde animar a los alumnos a utilizar manipulativos, hasta permitirles trabajar en grupo o darles indicaciones verbales. No se trata de lo que el niño puede hacer sin herramientas, porque las herramientas forman parte de las matemáticas.

Lo mismo ocurre con el trabajo en equipo. Se ha estudiado la evaluación dinámica para comprender mejor qué saben realmente los alumnos con discapacidades o con bajo rendimiento en matemáticas (Peltenberg et al., 2009; Storeygard et al., 2010). En un estudio, los estudiantes con discapacidades intelectuales demostraron comprender los conceptos de proporción por encima de lo que sus profesores habían previsto, a pesar de que no se les había enseñado el tema (Heuvel-Panhuizen, 1996). Esta evaluación escrita se diseñó para que fuera accesible, con elementos integrados en contextos de la vida real que implicaban la proporción, y no la notación simbólica de la proporción.

En el Movimiento por los Derechos de las Personas con Discapacidad, se ha criticado durante décadas la idea de que el conocimiento o la competencia deben evaluarse por sí solos, centrándose en las deficiencias. En cambio, podemos aprender lo que somos capaces de hacer con apoyo, con la comunidad y con herramientas. Abrir las prácticas de evaluación es una forma poderosa de llevar los derechos de las personas con discapacidad a nuestras aulas de matemáticas.

En el movimiento por los derechos de las personas con discapacidad, se ha criticado durante décadas la idea de que el conocimiento o la competencia deben evaluarse por separado, centrándose en las deficiencias.

Mientras trabajamos para que las prácticas de evaluación sean más eficaces y menos perjudiciales para los estudiantes, planteo las dos preguntas siguientes para guiar nuestro trabajo:

Comprobación de la accesibilidad de la evaluación

¿Ayuda la práctica de evaluación a los profesores a comprender y enseñar a alumnos complejos?

¿Ayuda la práctica de evaluación a los estudiantes a comprenderse a sí mismos como estudiantes de matemáticas?

El término «alumnos complejos» puede aplicarse a todos nuestros estudiantes; cada uno de nosotros es variable y complejo. Sin embargo, una de las razones por las que la evaluación supone una barrera es que los estudiantes con discapacidades suelen ser especialmente complejos de evaluar. El lenguaje de las evaluaciones puede ser complicado. Las evaluaciones pueden ser estresantes cuando se siente que se ha fracasado en ellas en el pasado. Además, la comprensión de los alumnos puede variar según los temas matemáticos y el contexto específico de la evaluación. Las buenas evaluaciones nos permiten ver y comprender la complejidad, como las tres tareas de entrevista sobre el conteo del capítulo 3.

¿Cómo utilizaríamos estas preguntas para evaluar mi trabajo con Jeremy y Franco? Bueno, la sencilla evaluación que había diseñado me proporcionó información importante sobre las estrategias matemáticas y la comprensión de Franco. Pero a Jeremy solo pareció causarle estrés. No solo tenía que ofrecerle bloques, sino también ayudarlo a ver cómo podía utilizarlos en la evaluación, así como en nuestra sesión. Una vez que estableció esta conexión, la evaluación me proporcionó información útil y le ayudó a comprenderse a sí mismo como estudiante de matemáticas.

HACIA UNA EVALUACIÓN EQUITATIVA EN UNA CLASE DE SECUNDARIA

Por supuesto, no solo los alumnos temen las evaluaciones. Muchos profesores también consideran que la evaluación es la parte más difícil de nuestro trabajo. El Sr. Jay, que en el capítulo 4 nos mostró cómo utilizar tanto la indagación como tipos de instrucción más explícitos, también estaba experimentando con la evaluación en su aula.⁴ Cuando le pregunté qué estaba tratando de cambiar en la evaluación, me contó una historia (**Figura 14.7**).

⁴ Estos datos fueron recopilados y analizados con la ayuda de mis colegas Marilyn Monroy Castro y Rebeca Mireles-Ríos.



Figura 14.7. • El Sr. Jay trabajando con un alumno

Durante el examen estatal de hace unos años, una niña de su clase de séptimo grado que era una excelente estudiante de matemáticas lo llamó con una mirada frenética. Señaló un problema y le preguntó a su profesor: «¿Qué debo hacer?». El Sr. Jay no supo qué responder, pero vio que ella había resuelto todo menos un último problema de resta para hallar la diferencia entre 16 y 8. Nunca la había visto tener dificultades con un problema así. El Sr. Jay no supo qué responder, así que se limitó a decir: «Sé que puedes resolverlo». Pero se sintió preocupado.

Describió dos problemas muy importantes con este tipo de evaluación. En primer lugar, había provocado que su alumna, normalmente tranquila y serena, se sintiera extremadamente estresada. Estaba tan estresada que no podía recordar cómo resolver un problema que normalmente habría resuelto. Le preocupaba que se tratara de un problema de resta, algo que normalmente habría hecho sin pensar. Esa sensación de estrés, de ansiedad, era un gran problema en sí misma. El Sr. Jay considera que su trabajo como profesor de matemáticas de secundaria consiste en interrumpir la profunda inmersión que los alumnos de esa edad suelen experimentar en su disfrute de las matemáticas (Gottfried et al., 2007). El Sr. Jay me dijo:

Mis alumnos se bloquean y se quedan en blanco bajo la presión de este examen: están ansiosos y no pueden pensar, y eso supone un gran obstáculo para ellos. Intento decirles que den un paseo, que tomen el aire. Porque ahora mismo, solo están pensando. Es decir, eso es miedo: es la respuesta de lucha o huida, en la que el cerebro se apaga.

Lo que describe el Sr. Jay me recuerda a la descripción de la ansiedad matemática, cuando la ansiedad ocupa la memoria de trabajo que los estudiantes necesitan para pensar en matemáticas (Ashcraft y Moore, 2009). También nos recuerda que los estudiantes de alto

rendimiento también experimentan ansiedad matemática, especialmente en situaciones de examen estresantes.

El segundo problema del Sr. Jay era que este examen estatal de alto nivel no era una medida precisa de lo que sabía su alumno. Esta combinación, que las evaluaciones actuales eran inexactas y estresantes, llevó al Sr. Jay a reformar sus prácticas de evaluación. Decidió que «los exámenes de matemáticas no tenían por qué ser iguales a los que yo tenía en la escuela secundaria. Podían cambiar para mejor».

Las evaluaciones formativas del Sr. Jay

El Sr. Jay ya tenía algunas prácticas de evaluación que le funcionaban y que quería mantener. La observación era su herramienta de evaluación más importante. Como me dijo: «Cada niño de mi clase es un rompecabezas diferente, como un problema matemático en sí mismo». El Sr. Jay conoce a sus alumnos y sabe que cada uno está trabajando en algo diferente. Es capaz de aprender sobre los alumnos a través de la observación y se centra en cosas diferentes para cada uno de ellos.

«Cada niño de mi clase es un rompecabezas diferente, como un problema matemático en sí mismo».

El Sr. Jay también recopilaba los trabajos de los alumnos y, cada día después de clase, lo veía revisarlos. Este proceso, junto con sus observaciones, siempre influía en la forma en que impartía la clase al día siguiente. El Sr. Jay también solía pedir a los alumnos que resolvieran un problema breve al final de la clase, una ficha de salida, sobre todo si tenía la sensación de que los alumnos no estaban seguros de un tipo de problema concreto. A continuación, las recogía y las analizaba. Las fichas de salida solían servirle para obtener información precisa sobre la clase en su conjunto, lo que le ayudaba a saber si debía seguir adelante o volver al tema al día siguiente.

En todos estos aspectos, el Sr. Jay prestaba mucha atención a las estrategias de los alumnos. Las estrategias de los alumnos eran un tema frecuente de conversación en clase. Para ayudar a los alumnos a perfeccionar y recordar sus estrategias, el Sr. Jay les pedía que hicieran sus propias tablas de estrategias en sus cuadernos. Este proceso se convirtió en un elemento de evaluación fundamental, y el Sr. Jay pedía a los alumnos que compartieran sus estrategias para poder discutir su eficacia. Si un alumno empezaba a utilizar la estrategia de otro, también la incluía en el cuaderno.

Rúbricas para tareas de investigación guiada

Como exploramos en el capítulo 4, el Sr. Jay y sus alumnos realizaban semanalmente tareas de patrones visuales. Decidió que quería dar a los alumnos una mejor idea de lo que esperaba de ellos en su participación en estas tareas, para ofrecerles comentarios estratégicos. También

quería asegurarse de que el esfuerzo de los alumnos en estas tareas se reflejara en sus calificaciones. Creó una rúbrica sencilla:

Nivel	Acciones de los alumnos en la tarea de patrones visuales
1	El alumno vuelve a dibujar el patrón
2	El alumno continúa el patrón con los siguientes términos
3	El alumno encuentra el número de cuadrados en el término 43
4	El alumno escribe una expresión para resolver cualquier término.

Esta rúbrica fue útil para centrar a los alumnos en el siguiente paso de su proceso de resolución de problemas,

así como para ayudarles a comprender cuál era el siguiente paso en su propio desarrollo. En mi observación de la tarea visual, que describo en el capítulo 4, todos los alumnos de la clase inclusiva cumplieron las expectativas del nivel 4 para ese patrón visual (aunque muchos se saltaron el nivel 3). Mi observación se produjo a finales del año escolar y, claramente, los estudiantes habían recibido comentarios y los habían tenido en cuenta. Su desarrollo estratégico se vio respaldado por esta rúbrica.

Reconsiderar las pruebas y los exámenes

En el segundo año que estuve observando en su clase, el Sr. Jay hizo un cambio radical en cómo hacía los exámenes y pruebas en su clase. Pasó de exámenes y pruebas que evaluaban el conocimiento individual a exámenes y pruebas colaborativos. Normalmente dividía a los alumnos en grupos aleatorios de tres. Los alumnos trabajaban juntos en la evaluación, y cada uno escribía las respuestas en su propia hoja de papel. Se les calificaba en función de las respuestas de su propia hoja, pero se les animaba a hablar y debatir todo lo que quisieran. Además, los alumnos siempre podían volver a hacer cualquier parte de un examen o prueba.

En colaboración con el profesor del aula de recursos, el Sr. Jay también permitía a los alumnos con IEP elegir hacer los exámenes de unidad en el aula de recursos. Los alumnos, especialmente al comienzo de su primer año en su clase de séptimo grado, elegían esta opción. El Sr. Jay creía que este enfoque les funcionaba porque aumentaba su confianza al comenzar a enfrentarse a las altas expectativas académicas de las matemáticas de séptimo grado, con el cambio hacia unas matemáticas más abstractas de álgebra. La mayoría de los alumnos decidieron durante el año realizar las pruebas en clase con el resto de los alumnos. En las entrevistas, una de las alumnas con un IEP nos dijo que no sentía la necesidad de ir a la sala de recursos después de las primeras pruebas. Su decisión se basó en el formato grupal de las evaluaciones, lo que le hizo sentir lo suficientemente cómoda como para poder pedir ayuda si fuera necesario. Me encanta cómo esta alumna se sintió empoderada para tomar decisiones sobre sus propias adaptaciones en las pruebas.

El trabajo del Sr. Jay se ajusta mucho a la calificación basada en el dominio, en particular en lo que respecta a la posibilidad de que los alumnos repitan las pruebas y los exámenes hasta que demuestren que dominan el concepto (Townsend y Schmid, 2020). En el caso del Sr. Jay, creo que su rediseño está más relacionado con la percepción de la evaluación. Constantemente relacionaba sus prácticas de evaluación no solo con el tipo de datos que recopilaba, sino también con cómo podían hacer sentir a sus alumnos.

RESPUESTA DE LOS ESTUDIANTES Y LOS PROFESORES

Tanto el Sr. Jay como sus alumnos estaban satisfechos con este cambio en la evaluación. El Sr. Jay cree que ha pasado de ser una forma de «pillarlos» a ser una situación en la que los alumnos realmente aprenden. Me dijo:

Creo que, en este nivel, un examen de matemáticas debería ser una oportunidad de aprendizaje en lugar de algo que desanime a los niños. Quiero decir, un niño pensará: «Oh, ahora tengo un suspenso», ya sabes. Así que creo que, si puedo convertirlo en una oportunidad de aprendizaje, dejo que los niños hagan exámenes en grupo.

En un grupo de discusión con sus alumnos de séptimo curso, les pregunté qué opinaban de los exámenes y pruebas en grupo. Me dijeron que era mejor que hacer los exámenes solos, porque

«se sienten más seguros en grupo».

Se sienten «seguros».

«A veces se me olvida, ellos me lo recuerdan, es como un respaldo».

«Si no sabes algo, puede que las personas que te rodean lo sepan, es mejor juntos».

«Tu grupo tiene que ponerse de acuerdo».

Entonces, ¿las prácticas de evaluación del Sr. Jay responden a mis preguntas sobre la comprobación de la accesibilidad de la evaluación?

¿Ayuda la práctica de evaluación a los profesores a comprender y enseñar a alumnos complejos?

¿Ayuda la práctica de evaluación a los alumnos a comprenderse a sí mismos como estudiantes de matemáticas?

Yo diría que sí. Está aprendiendo sobre sus alumnos a través de la observación, el trabajo de los alumnos y las estrategias de los alumnos. También aprende sobre lo que son capaces de

hacer en grupos pequeños. Los alumnos pueden aprender más sobre sí mismos a través de estas prácticas de evaluación, en sus cuadernos de estrategias, las rúbricas de las tareas visuales y las pruebas/cuestionarios en grupo. Una última forma en la que los alumnos desarrollan la autocomprensión es la opción de repetir la prueba. Cuando los alumnos pueden revisar sus evaluaciones y tomar sus propias decisiones sobre lo que quieren volver a intentar, aprenden lo que saben y lo que necesitan seguir trabajando.

AMPLIAR LA EVALUACIÓN A TRAVÉS DE LA ELECCIÓN

Al reflexionar sobre la transformación del Sr. Jay de un sistema de calificación tradicional a uno en el que los estudiantes pueden dar y recibir ayuda en la mayoría de los temas, también quiero considerar prácticas de evaluación adicionales que apoyen a los estudiantes neurodiversos. En su libro *Choosing to See* (2021), Pam Seda y Kyndall Brown relacionan las prácticas de enseñanza de las matemáticas con la equidad racial y la enseñanza culturalmente relevante. En su capítulo sobre «Liberar el control», hablan del uso de cuestionarios que dan autonomía al estudiante a través de la elección. He aquí su ejemplo de un cuestionario de elección elemental «Totally Ten», en el que los estudiantes eligen las opciones para su evaluación.

Cuestionario Totally Ten para primaria

Instrucciones: Puedes elegir problemas de cualquier categoría hasta alcanzar una puntuación total de 10. Solo puedes elegir dos problemas de la sección «Puntuación 2». Por ejemplo, puedes elegir dos problemas de «Puntuación 2» y uno de «Puntuación 6». ¡Tú decides! Para obtener créditos extra, puedes alcanzar una puntuación máxima de 12. Muestra todo el trabajo en una hoja de papel aparte.

FUENTE. Adaptado de Seda y Brown (2021, pp. 152-153).

Puntuación 2

Evaluar: $25 + 32$

Evaluar: $45 - 27$

Evalúa: 17×26

Puntuación 4

Crea una operación de suma que dé como resultado la siguiente respuesta: 833

Crea una resta que dé como resultado la siguiente respuesta: 211

Crea un problema de multiplicación que dé como resultado la siguiente respuesta: 544

Puntuación 6

Crea un problema de división que dé como resultado la siguiente respuesta: 13

Puntuación 8

Crea un problema para cada operación (suma, resta, multiplicación y división) que dé como resultado la siguiente respuesta: 242

Piénsalo

¿En qué se diferenciaría un cuestionario Totally Ten de un cuestionario tradicional para un estudiante? ¿Podría eso influir en su puntuación? ¿Qué aprenderíamos de un cuestionario de este tipo?

Este tipo de evaluación permitiría a los alumnos tomar decisiones que nos ayudarían a saber lo que realmente saben. Se me ocurren alumnos que irían directamente a la puntuación 8, el problema más difícil, porque el aspecto creativo se adapta mejor a ellos. Sin embargo, los alumnos que se sienten más cómodos con el cálculo también tienen opciones en la puntuación 2. Este tipo de evaluación también desarrolla la competencia estratégica de los alumnos. Cada vez que pedimos a los alumnos que tomen decisiones (sobre qué estrategia utilizar, qué problemas resolver o cómo trabajar en clase), estamos desarrollando su autocomprensión como estudiantes de matemáticas. Están aprendiendo a través de sus elecciones. Cuando no les ofrecemos opciones, estamos decidiendo por ellos qué es lo que mejor les conviene, ¡y podemos equivocarnos!

PREGUNTAS DE REFLEXIÓN

1. ¿Ha experimentado la evaluación en matemáticas como una barrera como estudiante o como profesor? ¿Qué tipo de evaluaciones?
2. ¿Hay alguna práctica de evaluación en este capítulo que le gustaría probar? ¿Cuál?
3. Elija una evaluación que utilice en su trabajo y compruebe cómo funciona en la comprobación de accesibilidad de la evaluación:

¿Ayuda la práctica de evaluación a los profesores a comprender y enseñar a alumnos complejos?

¿Ayuda la práctica de evaluación a los estudiantes a comprenderse a sí mismos como estudiantes de matemáticas?

Participación	Representación	Acción estratégica
Uno de los problemas que el Sr. Jay tenía con sus prácticas de evaluación anteriores era cómo hacían sentir a sus alumnos. A medida que prueba nuevas prácticas, comprueba constantemente cómo se sienten los alumnos con respecto a las nuevas prácticas de evaluación.	Los múltiples tipos de evaluación permiten al Sr. Jay ver a los alumnos desde diferentes puntos de vista. Rachel descubrió que Jeremy demostraba tener más conocimientos sobre la multiplicación cuando la evaluación era multimodal.	El Sr. Jay considera que la evaluación es una barrera para los alumnos. Está tratando de rediseñar su aula tanto en la forma en que aprende sobre sus alumnos como en la forma en que les da retroalimentación. La evaluación se rediseña para desarrollar el autoconocimiento estratégico de los alumnos.

Desentrañando una idea fundamental: el pensamiento algebraico II

Para muchos alumnos, el álgebra es una serie de pasos que siguen sin comprender el porqué. El álgebra puede ser una experiencia muy diferente si se presta la atención suficiente a garantizar que los alumnos vean las conexiones entre las ecuaciones abstractas y las representaciones concretas.

Reconocer y describir patrones repetidos es una idea central del álgebra. Las tareas de patrones visuales (<https://www.visualpatterns.org/>), que el Sr. Jay utiliza en este capítulo y en el capítulo 4, son una forma excelente de ayudar a los estudiantes a generalizar ecuaciones abstractas a partir de patrones geométricos concretos. Se pide a los alumnos que generalicen cada caso para describir el patrón creciente utilizando lenguaje simbólico. De este modo, los alumnos tienen una razón para utilizar notaciones como paréntesis, coeficientes y exponentes, ya que los necesitan para describir matemáticamente los patrones que observan.

Las tareas de patrones visuales piden a los alumnos que hagan conjeturas sobre cómo crece el patrón, predigan los siguientes casos, generalicen cómo crece y determinen qué ecuación lo describe. Este tipo de pensamiento es fundamental para las matemáticas. Una característica maravillosa de los patrones visuales es que los alumnos idean diferentes formas de dividir el patrón, lo que da lugar a diferentes ecuaciones. A continuación, pueden debatir si estas ecuaciones son equivalentes. Debatir cómo escribir la misma fórmula de diferentes maneras puede reforzar la comprensión de los alumnos sobre la simplificación de expresiones, que de otro modo puede parecer abstracta. Los alumnos pueden incluso representar gráficamente los patrones visuales para reforzar aún más su comprensión a través de las representaciones.

Más información:

Van de Walle, J., Bay-Williams, J., Lovin, L. y Karp, K. (2017). Enseñar matemáticas centradas en el alumno: Instrucción adecuada al desarrollo para los grados 6-8 (3.ª ed.). Pearson.

Descripciones de imágenes y figuras

Figura 14.1 • Primera evaluación de Franco

Franco responde a los 6 problemas de la siguiente manera.

Problema 1. 2 por 4. Franco escribe su respuesta como 8.

Problema 2. 5 por 5. Franco escribe su respuesta como 25.

Problema 3. 6 por 10. La respuesta de Franco es 60.

Problema 4. 4 por 2. La respuesta de Franco es 12.

Problema 5. 3 por 7. La respuesta de Franco es 28.

Problema 6. 8 por 9. La respuesta de Franco es 20.

Figura 14.2 • Segunda evaluación de Franco

Franco responde a los 6 problemas de la siguiente manera.

Problema 1. 2 por 4. Franco escribe su respuesta como 12.

Problema 2. 5 por 5. Franco escribe su respuesta como 25. Escribe su suma repetida como 5 más 5 más 5 más 5 más 5 es igual a 25.

Problema 3. 6 por 10. La respuesta de Franco es 60. Escribe 6 por 10 es igual a 6 y luego escribe la suma repetida: 10 más 10 más 10 más 10 más 10 más 10 es igual a 60.

Problema 4. 4 por 2. La respuesta de Franco es 8. Escribe 4 por 2 es igual a 8.

Problema 5. 3 por 7. La respuesta de Franco es 21. Escribe la suma repetida de 7 más 7 más 7 es igual a 21.

Problema 6. 8 por 9. La respuesta de Franco es 30. Escribe la suma repetida: 9 más 9 más 9 más 9 más 9 más 9 es igual a 30. Escribe un signo de interrogación junto al número 30.

Figura 14.3 • Primera evaluación de Jeremy

Jeremy responde a los 6 problemas de la siguiente manera.

Problema 1. 2 por 4. Jeremy escribe su respuesta como 8.

Problema 2. 5 por 5. Jeremy escribe su respuesta como 24.

Problema 3. 6 por 10. Jeremy no responde a esta pregunta.

Problema 4. 4 por 2. La respuesta de Jeremy es 26.

Problema 5. 3 por 7. La respuesta de Jeremy es 10.

Problema 6. 8 por 9. La respuesta de Jeremy es 18.

Figura 14.4 • Segunda evaluación de Jeremy

Jeremy responde a los 6 problemas de la siguiente manera.

Problema 1. 2 por 4. Jeremy escribe su respuesta como 8.

Problema 2. 5 por 5. Jeremy no responde a esta pregunta.

Problema 3. 6 por 10. Jeremy no responde a esta pregunta.

Problema 4. 4 por 2. La respuesta de Jeremy es 4.

Problema 5. 3 por 7. Jeremy no responde a esta pregunta.

Problema 6. 8 por 9. Jeremy no responde a esta pregunta.

Figura 14.6 • Tercera evaluación de Jeremy utilizando bloques

Jeremy responde a los 6 problemas de la siguiente manera.

Problema 1. 2 por 3. Jeremy escribe su respuesta como 6.

Problema 2. 5 por 4. Jeremy escribe la respuesta como 20.

Problema 3. 7 por 10. La respuesta de Jeremy es 70.

Problema 4. 3 por 2. La respuesta de Jeremy es 6.

Problema 5. 3 por 8. La respuesta de Jeremy es 24.

Problema 6. 6 por 9. Jeremy no responde a esta pregunta.

CAPÍTULO 15: REIMAGINAR LOS OBJETIVOS MATEMÁTICOS EN LOS PROGRAMAS EDUCATIVOS INDIVIDUALIZADOS

EN ESTE CAPÍTULO, VAMOS A...

Siga a Suzanne, una profesora de educación especial, mientras rediseña los objetivos matemáticos del Programa de Educación Individualizada (IEP) de sus alumnos.

Investigar las preocupaciones sobre los objetivos matemáticos del IEP

Exploraremos los objetivos MATHS (medibles, ambiciosos, orientados al acceso, de alto impacto y que incluyen a las partes interesadas) mientras Rachel reimagina los objetivos para un antiguo alumno.

TODO COMENZÓ en una reunión con Suzanne Huerta (**Figura 15.1**), profesora de educación especial de quinto grado, y su tutora de matemáticas, Jody Guarino, después de una visita a su aula de educación especial. En la visita a la clase, sus alumnos se mostraron entusiasmados y positivos con respecto a las matemáticas que estaban aprendiendo sobre fracciones. Suzanne había comenzado la clase con la siguiente pregunta:



Figura 15.1 • Suzanne Huerta, maestra de educación especial

FUENTE: SUZANNE HUERTA

¿Qué sabéis sobre los $\frac{3}{8}$?

A continuación, todos los alumnos compartieron algo que sabían sobre los $\frac{3}{8}$. Era evidente que los alumnos estaban desarrollando una comprensión relacional de las fracciones (véase la figura 15.2). Me encantó que la tarea fuera desafiante, pero tan abierta que todos tuvieran

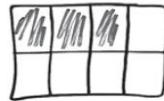
algo que compartir.

Día 22 Introducción (Warm-Up)

¿Qué sabes sobre $\frac{3}{8}$?

Está en nuestra recta numérica

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$



Fracción

$$\frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \times 1 = \frac{3}{8}$$

Casi $\frac{1}{2}$



$$3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} \neq \frac{3}{6}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{10}{8} - \frac{7}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{8} - \frac{3}{8} = \frac{0}{8} = 0$$

Figura 15.2 • Tabla de Suzanne con las respuestas de los alumnos a «¿Qué sabes sobre $\frac{3}{8}$?» (se han eliminado los nombres)

FUENTE: Reproducido con permiso de Suzanne Huerta.

Piénsalo

¿Qué saben estos alumnos sobre las fracciones? ¿Puedes nombrar al menos cinco cosas que saben sobre las fracciones?

A continuación, planteó el siguiente problema sobre la elaboración de pasteles, que situó en el contexto de un próximo evento escolar:

Los alumnos quieren hornear 6 pasteles. Cada pastel necesita $\frac{1}{3}$ de taza de azúcar. ¿Cuánta azúcar necesitan?

Los alumnos estaban emocionados por compartir sus ideas sobre este problema (un problema de fracciones con múltiples grupos). Su trabajo demostró una sólida comprensión de las fracciones, incluido el pensamiento relacional que es fundamental para comprender las fracciones.

Mientras hacíamos el resumen, Suzanne quiso desviar la conversación hacia un problema importante que aún no había podido resolver: los objetivos matemáticos del IEP, o los objetivos anuales individualizados de los IEP de sus alumnos, documentos legales que establecen la responsabilidad del crecimiento de los alumnos. Compartió cómo, a medida que su enseñanza había cambiado hacia la búsqueda de sentido, sus IEP y la recopilación

de datos relacionados se habían ido desconectando cada vez más del trabajo real de la clase. Los alumnos ahora expresaban su descontento por tener que dejar de resolver problemas para trabajar en pequeños grupos en los objetivos matemáticos y/o recopilar datos para esos objetivos, a menudo en una hoja de ejercicios.

Para Suzanne, estos objetivos del IEP ya no reflejaban sus objetivos como profesora de matemáticas. Sus objetivos eran que los alumnos comprendieran los problemas matemáticos, perseveraran ante los retos y desarrollaran estrategias que pudieran utilizar para comprender cualquier problema. Quería que empezaran a conocerse a sí mismos como estudiantes de matemáticas y que supieran cómo resolver problemas. Quería diseñar objetivos en torno a los Estándares de Práctica Matemática (SMP), en particular el SMP 1: Entender los problemas y perseverar en su resolución.

Al finalizar la reunión, decidimos trabajar juntos en la revisión de la forma en que ella diseñaba y recopilaba datos para los objetivos del IEP de sus alumnos en matemáticas. Suzanne eligió a tres alumnos que (a) necesitaban actualizar los objetivos del IEP en matemáticas y (b) necesitaban más apoyo para resolver los desafiantes problemas con fracciones de su nivel que Suzanne les planteaba en clase. Escribió un objetivo general, que incluyo aquí sin detalles específicos que puedan relacionarlo con un alumno en particular, aunque sus objetivos individualizados pueden incluir tipos de problemas y/o estrategias ligeramente diferentes.

Para el [fecha], cuando se le plantee un problema [números enteros o fracciones], el alumno demostrará el uso de algunas de estas tres estrategias [reformular el problema con sus propias palabras, crear una representación y revisar su estrategia cuando sea necesario] para comprender el problema y perseverar en su resolución en $\frac{4}{5}$ intentos, según la evaluación del profesor del trabajo del alumno/la recopilación de datos.

Suzanne siempre se ha asegurado de que sus alumnos comprendan sus objetivos del IEP, reuniéndose regularmente con ellos para discutir su progreso. Suzanne se sentó con cada uno de estos alumnos y, en primer lugar, discutió lo que les iba bien en matemáticas y lo que les resultaba difícil. También discutieron los objetivos matemáticos anteriores de cada alumno. Suzanne presentó los nuevos objetivos a los alumnos, que estaban muy entusiasmados por centrarse en el tipo de problemas que resolvían en clase. Juntos, se aseguraron de que cada objetivo individual contara con estrategias en las que el alumno quisiera trabajar durante la resolución de problemas. Suzanne les dijo que recopilaría datos observando sus muestras de trabajo durante la clase, así como tomando notas en un documento de observación que había elaborado (cada uno con los objetivos estratégicos específicos para cada alumno; **Tabla 15.1**).

Fecha	[Alumno] fue capaz de reformular «de qué trataba el problema» con sus propias palabras cuando se lo preguntó un	[Alumno] intentó múltiples estrategias o métodos para resolver el problema, como lo demuestran las muestras de trabajo del alumno	[Alumno] utilizó representaciones, imágenes o diagramas en su solución, como lo demuestran las muestras de trabajo
-------	---	---	--

	profesor.	y/o las observaciones.	del alumno.
Notas del profesor			

Durante estas conversaciones, un alumno incluso pidió crear un objetivo matemático adicional sobre un contenido matemático específico (contar de cinco en cinco), ¡que Suzanne añadió encantada!

Mientras Suzanne trabajaba para poner en práctica la recopilación de datos para estos objetivos, se sorprendió gratamente de lo «integrada» (en sus propias palabras) que estaba esta recopilación de datos en su práctica diaria. La mayoría de los días hacía un problema con historia con los alumnos (como el problema de los múltiples grupos con los pasteles) y siempre pedía a algunos alumnos que reformularan el problema antes de que los alumnos se pusieran a trabajar. Se aseguraba de pedir a los alumnos con este nuevo objetivo del IEP que lo hicieran al menos una vez a la semana, y llevaba un registro de su progreso en la reformulación del problema.

Cuando le pregunté cómo iba, me dijo: «Está ayudando a los alumnos, porque explican mucho más su razonamiento». Esto se debía tanto a que ella hacía más preguntas y prestaba más atención a cómo resolvían los problemas, como a que los alumnos sabían que era su objetivo del IEP y, por lo tanto, creían que era importante. También dijo:

Siento que, por una vez, disfruto trabajando en un objetivo. Antes, solía entregarles una hoja de ejercicios, pedirles que me la devolvieran cuando la terminaran y luego calculaba el porcentaje de aciertos. Pero ahora siento que estoy desarrollando una relación con mis alumnos, no solo en cuanto a lo que saben o no saben, sino también en cuanto a cómo lo saben.

Con este cambio, Suzanne está trabajando en lo que realmente importa tanto para ella como para sus alumnos. El trabajo del IEP está alineado con su trabajo diario como profesora, y tanto los alumnos como la profesora están de acuerdo en la importancia de este objetivo. ●

OBJETIVOS MATEMÁTICOS DEL IEP

Todos los alumnos que reúnen los requisitos para recibir educación especial en Estados Unidos y que necesitan apoyo académico tienen un IEP. (A los alumnos que necesitan adaptaciones y/o servicios, pero no instrucción académica especializada, se les asigna un plan 504). Los objetivos del IEP suelen ser establecidos por los profesores anteriores de los alumnos, aunque siempre tenemos la posibilidad de actualizar los objetivos anuales durante el curso escolar. Los objetivos que tenían originalmente los alumnos de Suzanne eran los típicos de los objetivos matemáticos del IEP en todo el país: se centraban en el cálculo y los procedimientos. Objetivos como los siguientes:

Para (fecha), cuando se le den 25 multiplicaciones de números de dos dígitos por números de un dígito, el estudiante multiplicará números de un dígito por números de dos dígitos utilizando el algoritmo estándar con una precisión del 80 % en 4 de cada 5 intentos.

Los educadores me hablan constantemente de sus problemas con los objetivos matemáticos del IEP, como este. Me dicen que los objetivos del IEP están definidos de forma demasiado restrictiva en cuanto al cálculo, los algoritmos y la memorización, a menudo con habilidades por debajo del nivel del grado. Dado que los objetivos del IEP son legalmente vinculantes, los educadores estamos obligados a cumplirlos. Desde la reautorización de la Ley de Educación para Personas con Discapacidades (IDEA) en 1990, los objetivos del IEP deben basarse en estándares. El objetivo es garantizar que los niños con un IEP tengan acceso a contenidos acordes con su nivel académico y que los objetivos para ellos sean ambiciosos. Este requisito se deriva del hecho de que muchos IEP repetían año tras año los mismos objetivos con bajas expectativas.

Un objetivo del IEP puede hacer que la inclusión de los alumnos sea difícil o imposible, ya que algunos objetivos están tan desconectados de la práctica en el aula que los alumnos deben ser retirados de la clase para recibir instrucción sobre los objetivos de su IEP. Otro problema es que, a menudo, los estudiantes comprenden muy poco sus propios objetivos del IEP. Algunos distritos controlan la redacción de los objetivos del IEP, proporcionando a los profesores listas desplegables creadas por una empresa en lugar de creadas individualmente para cada estudiante. Sin embargo, a pesar de estos problemas, los objetivos del IEP pueden ser una hoja de ruta para garantizar que los estudiantes de educación especial reciban realmente la enseñanza especialmente diseñada que se les ha prometido.

DEFENSA DE LOS OBJETIVOS

Paulo Tan es un antiguo profesor de matemáticas y actualmente profesor de Estudios sobre Discapacidad en la Educación. También es padre de un niño con discapacidad. Comparto aquí su reflexión sobre una polémica reunión del IEP para su hijo en la que se redactó un nuevo objetivo de matemáticas del IEP, recogida en un artículo sobre la transformación de los objetivos de matemáticas del IEP (Tan, 2017). En este artículo, relaciona los objetivos del IEP con el desarrollo de una mentalidad matemática, como el desarrollo de una relación positiva con las matemáticas. Señalando que la visión de una reunión del IEP es la colaboración entre las familias y los educadores, observa que

esta visión a menudo se pierde en el proceso de desarrollar objetivos discretos y a corto plazo que sean alcanzables. Esta desconexión suele deberse a un enfoque excesivo en la recuperación de las deficiencias en las habilidades. El profesor de educación especial principal consideró que era importante que uno de los objetivos matemáticos del IEP fuera que mi hijo, que estaba en quinto grado, identificara correctamente los números de un dígito en un campo de dos. Como educador matemático y padre con 11 años de experiencia y conocimiento de los conocimientos generales de mi hijo, le expresé al profesor que mi hijo estaba muy por encima de la identificación y el reconocimiento de números. . . . Sin embargo, la discusión se prolongó

durante algún tiempo, ya que no estaban convencidos de mis afirmaciones. El punto muerto se resolvió cuando orienté al equipo hacia nuestra visión común y nuestras conversaciones previas sobre mentalidades matemáticas poderosas. (Tan, 2017, p. 35)

Si logramos alinear los objetivos matemáticos del IEP con nuestra visión de una matemática equitativa, los objetivos del IEP pueden pasar de ser una barrera a ser una herramienta para la equidad (Tan, 2017).

REVISIÓN DE NUESTRA COMPRENSIÓN DE LOS OBJETIVOS DEL IEP

Según la IDEA, el objetivo principal de los objetivos del IEP es «satisfacer las necesidades del niño que se derivan de su discapacidad para que pueda participar y progresar en el plan de estudios de educación general» (IDEA, sección 1414 [d][1][A][i][II]; citado en Yell et al., 2016). Por lo tanto, la implementación de objetivos basados en estándares no consiste simplemente en utilizar estándares de contenido para proporcionar el lenguaje de los objetivos del IEP, sino en un proceso más amplio de aumentar el acceso y la participación de los estudiantes con discapacidades en el plan de estudios de educación general que sigue estos estándares. Bateman y Linden (2006) sugirieron:

No sature los IEP con metas y objetivos detallados para todos los estándares de contenido del plan de estudios general. En su lugar, céntrese en las adaptaciones y ajustes que cada niño necesita para acceder adecuadamente a la participación en el plan de estudios general. Las metas deben priorizarse y abordar áreas amplias e importantes. (Bateman y Linden, 2006, pp. 15-16)

Este parece un gran consejo: elegir las metas en función de cuánto facilitan el acceso al plan de estudios de educación general. Entendemos, entonces, que los IEP basados en estándares son tanto un documento como un proceso que debe trabajar para facilitar el acceso y la participación del estudiante en el plan de estudios de educación general.

Entendemos, por lo tanto, que los IEP basados en estándares son tanto un documento como un proceso que debe trabajar para que el estudiante acceda y participe en el plan de estudios de educación general.

Otra forma de hacer que los objetivos del IEP sean más inclusivos y, al mismo tiempo, basados en estándares, es incorporar los principios del Diseño Universal para el Aprendizaje (UDL) en su diseño, de modo que los estudiantes que se comunican y aprenden en diferentes modalidades estén mejor incluidos. Caruana (2015) abogó por alejarse del lenguaje que limita las modalidades en las que los estudiantes pueden acceder y responder a la información. Por ejemplo, señaló el siguiente estándar de los Estándares Estatales Comunes (CCSS): «Decir y escribir la hora en horas y medias horas utilizando relojes analógicos y digitales». Propuso que, para un objetivo del IEP, esta norma se modificara de la siguiente manera: «Comunicar la hora en horas y medias horas utilizando relojes analógicos y digitales». Este cambio permite a los alumnos que utilizan sistemas de comunicación aumentativa y alternativa (CAA) cumplir las normas. Nuestros objetivos deben ser tan flexibles y multimodales como nuestra enseñanza.

PROPUESTA DE OBJETIVOS DE MATEMÁTICAS

Integrando mi experiencia como profesora con este trabajo reciente sobre cómo hacer que los objetivos del IEP sean más accesibles y estén más orientados a la práctica inclusiva, propongo los objetivos de MATEMÁTICAS (véase la tabla 15.2).

Medibles	Este objetivo puede medirse de una manera válida y fiable, así como manejable para el profesor que recopila los datos.
Ambiciosos	Este objetivo cree en el potencial de este niño para participar en matemáticas significativas y en la creación de sentido.
Hacia el acceso	Centrarse en este objetivo aumentará el acceso y la participación del niño en el aula/plan de estudios de educación general.
Enfoque de alto impacto	Centrarse en este objetivo reportará grandes beneficios al niño. La inversión en este concepto, habilidad o práctica dará sus frutos en el futuro. Hay dos categorías: <ol style="list-style-type: none">1. objetivos de contenido de alto impacto (las ideas fundamentales de las matemáticas) y2. objetivos de prácticas matemáticas de alto impacto (cómo participan los alumnos).
Aportación de las partes interesadas	Este objetivo se ha desarrollado en colaboración con el alumno, su familia y el profesor de educación general.

REVISIÓN DE UN OBJETIVO DEL IEP CON MATEMÁTICAS

Mientras escribía este capítulo, empecé a pensar mucho en uno de mis alumnos de cuando era profesor. José entró en mi clase en quinto curso. Tenía 10 años, procedía de una familia puertorriqueña que llevaba varias generaciones viviendo en Estados Unidos y tenía un IEP por una discapacidad específica del aprendizaje. José era tímido y le costaba mucho tiempo adaptarse a nuevas personas o situaciones. Le encantaban los animales y cuidaba con maestría la colección de animales de nuestra clase. Aunque era capaz de descifrar textos, parecía tener dificultades para recordar y comprender lo que leía.

En matemáticas, su clase anterior se había centrado exclusivamente en la memorización de datos y procedimientos, lo que parecía hacerle sentir inseguro a la hora de resolver problemas en mi clase. José había memorizado algunos procedimientos, como el algoritmo de la suma (que sabía hacer correctamente) y el algoritmo de la resta (que en su mayoría no sabía hacer). No estaba segura de qué entendía sobre conceptos matemáticos, como el valor posicional, ya que se mostraba reacio a hablar de matemáticas con adultos, incluso en situaciones individuales. José parecía tener especial dificultad cuando le presentaba un problema verbal o una tarea compleja, ya que esperaba que yo le dijera qué operación debía utilizar.

Sabía que José no tenía suficiente experiencia en comprender los problemas por sí mismo y, para mí, ese era el hábito más importante que podía enseñarle. También necesitaba aprender el plan de estudios de quinto grado, que se centraba en gran medida en las fracciones y la equivalencia. No estaba segura de si tenía dificultades significativas para comprender los conceptos de las fracciones o si no había tenido contacto con ellos en cursos anteriores, pero en ese momento le costaba identificar fracciones equivalentes o dibujarlas.

El objetivo del IEP de matemáticas de José cuando lo recibí como alumno era sencillo y procedimental:

Dado un conjunto de números, José resolverá problemas de resta de dos dígitos con reagrupación con una precisión del 80 % en $\frac{4}{5}$ intentos.

Este objetivo no me parecía adecuado. En primer lugar, no era lo suficientemente importante. La resta no parecía ser el uso más provechoso del tiempo de José como alumno de quinto curso, sobre todo teniendo en cuenta que el plan de estudios de quinto curso se centra en las fracciones, las proporciones y la equivalencia. El objetivo se redactó en torno a la resta porque era un área que se había identificado como necesaria en la evaluación de José, no porque la resta fuera lo más importante en lo que José debía centrarse. Por supuesto, quería enseñarle todo a José, pero sabía que tenía que centrarme, sobre todo al redactar los objetivos del IEP. Así que decidí asegurarme de que José supiera usar una calculadora para restar, quizá incluir algunos ejercicios de resta en la clase y seguir adelante con el ambicioso objetivo de que comprendiera las fracciones.

Reimaginar un objetivo del IEP de MATEMÁTICAS de ideas básicas

Basándome en mis evaluaciones, descubrí que José aún no era capaz de identificar fracciones equivalentes, incluida la $\frac{1}{2}$. Esto me pareció un aspecto matemático muy importante en el que invertir tiempo, ya que empezaba quinto curso y la equivalencia es importante tanto en fracciones como en álgebra. Se trata de una idea fundamental; invertir en su comprensión de este concepto debería facilitar su progreso no solo en matemáticas de quinto curso, sino también en matemáticas en todos los cursos posteriores. Escribí este objetivo como primer borrador del objetivo anual:

Dada una fracción, José generará dos fracciones equivalentes y explicará por qué son equivalentes.

Me gusta este objetivo. Creo que es ambicioso, favorece el acceso y tiene un gran impacto. Pero, ¿es medible? Todavía no. Sin embargo, antes de abordar esa cuestión, primero pensé en cómo ayudaría a José a desarrollar esta comprensión. ¿Cuál es la progresión que se aplica aquí? Probablemente, seguiríamos los tres pasos siguientes:

1. Identificar fracciones equivalentes (no producirlas, sino reconocerlas). Dado que José es tan tímido, creo que sería bueno empezar con fracciones equivalentes en múltiples formas (recta numérica, modelos de área, modelos de conjuntos y números) y permitirle elegir sin hablar. A partir de ahí, puedo aprender qué representaciones tienen sentido para él. Empezaría con fracciones de referencia como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$.
2. El siguiente paso sería generar fracciones equivalentes. Me gustaría que, si le diera $\frac{1}{2}$, fuera capaz de generar dos fracciones equivalentes dibujándolas, escribiéndolas o diciéndolas. Una vez más, me centraría en fracciones de referencia.
3. El último paso sería que José explicara por qué las fracciones son equivalentes. Esto sería un reto para José, no solo por su comprensión de las fracciones, sino también por su comodidad con el lenguaje matemático. Pero es importante animarle a hacerlo, siempre y cuando sea realmente un área en la que invertir. En este caso, animaría a José a hablar de un área compleja de las matemáticas (¡las fracciones son muy complicadas de explicar!). Realmente creía que este sería un objetivo importante para él y que tendría muchos beneficios a largo plazo.

Así que veo cómo podría facilitar esto, pero ¿cómo traduzco esta secuencia al lenguaje del IEP y la hago específica y medible? Aquí está mi segundo borrador, con los objetivos anuales:

Objetivo anual: Dada una fracción con un denominador de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 20 o 100, José generará dos fracciones equivalentes escribiendo una fracción y/o dibujando un modelo, y explicará verbalmente o por escrito por qué las fracciones son equivalentes en 3 intentos consecutivos.

Primer objetivo: Dados conjuntos familiares de tarjetas con múltiples representaciones (recta numérica, modelos de área, modelos de conjuntos y como números) de fracciones con denominadores de 2, 3, 4, 5, 6, 8 o 10, José será capaz de identificar pares de fracciones equivalentes con una precisión del 90 %.

Segundo objetivo: Dadas 4 fracciones con un denominador de 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 o 20, José generará dos fracciones equivalentes para cada fracción verbalmente o por escrito con una precisión del 90 %.

Decidí utilizar el porcentaje de precisión para los dos objetivos porque así no habría que presentar la misma tarea cinco veces (para evaluar cuatro de las cinco pruebas). Creo que una precisión del 90 % sería suficiente, ya que un solo error sería más computacional que conceptual. Estaría convencido de que José «lo había conseguido» si cumplía ese estándar. Pero para el objetivo anual, utilicé pruebas porque se trata de una tarea compleja que tiene dos comportamientos diferentes (generar y explicar), por lo que quería asegurarme de que realmente había entendido la idea evaluándolo más de una vez.

A lo largo de los objetivos, tuve cuidado de esbozar las condiciones específicas en las que se evaluaría a José, incluidos los denominadores que utilizaría, que se vuelven gradualmente más

complejos a medida que avanza el año. Al incluir 100 en el objetivo final, prepararí a José para comprender los porcentajes y los decimales.

¿Es este un objetivo de MATEMÁTICAS? Ahora es **medible**. Es **ambicioso** porque le pide a José que haga las matemáticas necesarias para su nivel de grado y que las explique, pero está diseñado para que le dé el apoyo necesario para leer el objetivo. El objetivo es **de acceso** porque las fracciones son tan importantes en quinto grado que este objetivo (especialmente en comparación con la resta) le permite centrarse en comprender lo que está sucediendo en su clase. Aunque algunos podrían argumentar que estos estándares son de tercer grado, son los estándares de tercer grado que apoyan el máximo compromiso en quinto grado. Y, por último, es **de alto impacto** porque también lo es el tema de las fracciones. La equivalencia es muy importante en todas las matemáticas. Una base sólida en fracciones podría marcar una gran diferencia para José. Dado que se trata de un ejercicio retrospectivo, no puedo incluir **a las partes interesadas**.

Reimaginar un objetivo del IEP de matemáticas del SMP

Aún quería diseñar otro objetivo del IEP para José, uno que le ayudara a participar más en la resolución de problemas matemáticos. Como mencioné, cuando conocí a José, le costaba empezar a resolver problemas y esperaba a que yo le dijera qué operación debía utilizar (lo cual nunca hice). Aún no sabía que podía resolverlo por sí mismo. He descubierto que esto suele ser un GRAN problema para los estudiantes con discapacidades, ya que han pasado años escuchando qué procedimientos deben utilizar. Después de haber sido entrenados de esa manera, es muy difícil para un estudiante involucrarse en la resolución de problemas complejos sin una ruta de solución predeterminada.

Así que durante las primeras semanas de la clase de quinto curso de José, me centré en un único aspecto relacionado con las matemáticas. Me acercaba a él mientras trabajaba en clase y le preguntaba: «¿Puedes decirme qué estás haciendo?» y «¿Tiene sentido para ti, sí o no?». Cuando le hice esta segunda pregunta por primera vez, me miró como si tuviera dos cabezas. No sabía muy bien a qué me refería: ¿cómo puede tener sentido las matemáticas? Con el tiempo, llegó a comprender que yo esperaba que le encontrara sentido a las matemáticas. Y tenía que saber, como mínimo, si las entendía. Y si negaba con la cabeza, aprendí a preguntarle: «¿Qué puedes hacer?». También aprendí que, para José, mis explicaciones no le servían de ayuda. Hablar con el profesor sobre matemáticas le resultaba muy estresante. A través de conversaciones sobre lo que podía hacer cuando se atascaba, llegamos a un punto en el que él (a) preguntaba a uno de sus amigos o (b) hacía un dibujo para resolver un problema. En resumen, José tenía dificultades para empezar los problemas, entenderlos y encontrar formas de perseverar cuando se enfrentaba a un reto. Y estábamos empezando a trabajar juntos en lo que podía hacer cuando se atascaba.

Intentemos traducir esto en un objetivo del IEP. El comportamiento que quiero es que José (a) después de leer un problema, intente entenderlo; (b) represente el problema; y (c) pruebe diferentes estrategias cuando se quede atascado hasta que encuentre una que funcione. Esto

es más difícil de evaluar que el objetivo de contenido. Decidí utilizar muestras de trabajo y rúbricas de autoevaluación para medir su progreso.

Empecé a pensar en involucrar al estudiante en las rúbricas de autoevaluación para los objetivos del IEP a través de conversaciones con Dustin Townsend, un profesor de educación especial de Iowa que ha estado experimentando con rúbricas colaborativas para evaluar los SMP de los estudiantes con discapacidades en la educación especial secundaria. La tabla 15.3 muestra una rúbrica de autoevaluación que diseñé para José basándome en las estrategias que le funcionaban.

Sí/No para cada día.	Lunes	Mar	Mié	Jue	Vier
Hoy he leído el problema varias veces hasta que lo he entendido.					
Hoy reformulé el problema con mis propias palabras.					
Hoy hice un dibujo del problema.					
Hoy pedí ayuda a mis amigos para conocer sus estrategias.					
¿Qué es lo que mejor me ha funcionado hoy?					

Lo bueno de esta estrategia es que ahora José está más involucrado, y eso significa ¡sorpresa! ¡más aprendizaje! Las SMP tratan de desarrollar los hábitos de los matemáticos e implican metacognición.

También podría validar la autoevaluación de José utilizando muestras del trabajo de los alumnos para proporcionar otra fuente de datos (lo que en investigación se denomina «triangulación»). La ventaja es que no supone ningún trabajo adicional para mí ni para José, y no significa que tenga que apartarlo o interrumpir su jornada de ninguna manera para evaluarlo. Para José, que es tímido y necesita tiempo para hacer su trabajo, esto es una ventaja.

Planeé comprobar su progreso en reuniones con José para revisar los datos. Si no está progresando, probablemente necesite un apoyo más explícito para aplicar estas estrategias, como un apoyo más estructurado para hablar con sus amigos sobre matemáticas, o quizás algunas preguntas que hacerse a sí mismo sobre los problemas para que se ponga a pensar.

Intentemos traducir esto al lenguaje del IEP. El comportamiento que quiero es que José

1. Después de leer un problema, intente darle sentido.
2. Representar el problema
3. Prueba diferentes estrategias cuando se quede atascado hasta que encuentre una que funcione.

Para que sea medible, debemos dejarlo muy claro.

Objetivo anual:

Dado un problema relacionado con los intereses de José, José demostrará el uso de estrategias para comprender los problemas y perseverar (incluyendo reformular el problema con sus propias palabras, crear una representación y revisar su estrategia cuando sea necesario), según lo medido por la rúbrica de autoevaluación del estudiante y la evaluación del profesor del trabajo del estudiante en cuatro de cinco oportunidades consecutivas.

¿Es este un objetivo de MATEMÁTICAS? Es **medible**. La medición parece correcta porque utilizo dos fuentes de datos diferentes. Es **ambicioso** porque pide a José que crezca en una práctica básica de las matemáticas (SMP 1). El objetivo es **accesible** porque participar en la resolución de problemas es el núcleo de su clase de matemáticas de educación general. Y, por último, este objetivo es **de gran influencia** porque la resolución de problemas es precisamente eso. Cuanto más nos dedicamos a la resolución de problemas en matemáticas, mejor se nos da la resolución de problemas (¡que ES matemáticas!). Y sin duda cumplió el reto que había discutido en las reuniones dirigidas por los alumnos con la familia de José, ayudándole a desarrollar la confianza en sus habilidades para resolver problemas (**aportación de las partes interesadas**).

SISTEMAS DESAFIANTE

Al terminar este libro, me parece adecuado concluir con los objetivos del IEP, un aspecto de nuestro trabajo que rara vez se realiza en solitario. Incluyo a las partes interesadas porque solo podemos mejorar nuestros objetivos si las familias se involucran. En algunos entornos, incluso los profesores de educación especial individuales tienen poco control sobre el proceso de diseño de los objetivos del IEP. Muchos de mis lectores son profesores de matemáticas de educación general, que pueden sentirse ajenos al proceso de redacción de objetivos (¡a pesar del requisito legal de que participen!). Algunos profesores consideran que los objetivos del IEP los redacta el departamento jurídico, y no los profesores. Los mejores objetivos del IEP son profundamente colaborativos: entre profesores con diferentes conocimientos, entre profesores y alumnos, entre familias y escuelas.

Aunque en este libro me he centrado en lo que está bajo su control como profesores en su aula, muchas de estas cuestiones nos obligarán a cuestionar y transformar sistemas injustos. Al igual que en nuestras aulas, podemos averiguar qué es lo que limita los sistemas en los que trabajamos. ¿Qué es lo que funciona para nuestros usuarios? ¿Cuáles son las barreras para

nuestras familias, alumnos y profesores? ¿Y cómo podemos abrir los sistemas y las prácticas para hacerlos más accesibles?

Aunque en este libro me he centrado en lo que está bajo su control como profesores en el aula, muchas de estas cuestiones nos obligarán a cuestionar y transformar sistemas injustos.

Podemos replantearnos la discapacidad, replantearnos las matemáticas, pero también tendremos que replantearnos nuestras escuelas y nuestros sistemas para que sean verdaderamente inclusivos para todos.

PREGUNTAS PARA LA REFLEXIÓN

1. ¿Cuáles han sido sus experiencias con los objetivos del IEP en matemáticas?
2. Si tuvieras una varita mágica y pudieras cambiar una cosa de los objetivos del IEP de tus alumnos en matemáticas, ¿qué sería?
3. ¿Podrían hacer que ese cambio se produjera? ¿Con quién tendrían que colaborar para conseguirlo?

Compromiso	Representación	Acción estratégica
Un objetivo del IEP sobre los SMP centra la atención en la participación en la resolución de problemas significativos. Trabajando juntos, los profesores y los alumnos pueden resolver problemas y aumentar la participación de los alumnos en la resolución de problemas y el debate matemático.	Centrar los objetivos del IEP en las ideas fundamentales crea más tiempo y espacio para trabajar en las ideas más importantes. Permitir flexibilidad en la forma en que los estudiantes demuestran lo que saben en un objetivo permite un mayor acceso a una gama más amplia de estudiantes.	Los objetivos del IEP se orientan hacia el desarrollo del autoconocimiento de los alumnos sobre cómo resuelven los problemas. El uso de rúbricas de autoevaluación implica a los alumnos en la comprensión de su propio aprendizaje.

Desglosar una idea central: equivalencia y ordenación de fracciones

Una vez que los alumnos comienzan a comprender cómo funcionan las fracciones a través de problemas con fracciones, empiezan a desarrollar la comprensión de la equivalencia fraccionaria. Los alumnos suelen empezar con las fracciones de referencia; al igual que suelen aprender primero $\frac{1}{2}$, aprenden qué es equivalente a $\frac{1}{2}$. La equivalencia es una idea central, ya que subyace a todo lo demás que hacen con fracciones, decimales y porcentajes. Como maestra de aula, pedí a los alumnos que crearan una página de fracciones, decimales y porcentajes equivalentes en su cuaderno de matemáticas, añadiendo fracciones

adicionales a medida que las aprendían. Para algunos alumnos, esta página se convirtió en un recurso importante para desarrollar la fluidez con las equivalencias de referencia.

Los alumnos desarrollarán sus propias estrategias para encontrar fracciones equivalentes, pensando especialmente en la relación entre los números. Así, para encontrar una fracción equivalente a $\frac{1}{2}$, los alumnos pueden empezar duplicando el numerador y el denominador a $\frac{2}{4}$, luego otra vez a $\frac{4}{8}$, y así sucesivamente. Si necesitan simplificar, les resulta útil saber que la relación sigue siendo la misma. Algunos de mis alumnos utilizaban una tabla de relaciones para llevar un registro de lo que hacían.

1	2	4	8
2	4	8	10

so $\frac{1}{2} = \frac{8}{10}$

Comparar y ordenar fracciones es una habilidad estrechamente relacionada, que también utiliza la comprensión relacional de las fracciones que los alumnos están desarrollando. Un modelo importante para ello es la recta numérica. Los alumnos pueden jugar a juegos o realizar actividades en las que averigüen qué fracciones son mayores o menores que otras y las coloquen en una recta numérica (¡o en un tendedero!). Las estrategias importantes que desarrollan los alumnos son

Reconocer fracciones que son iguales a 1

Reconocer fracciones que son mayores que 1

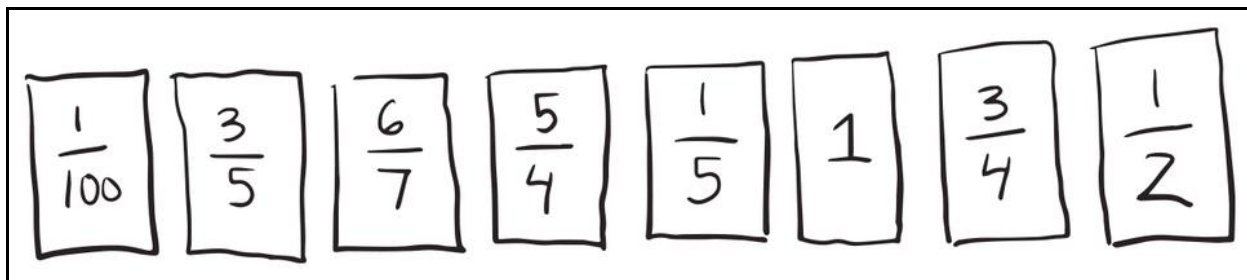
Comparar solo el tamaño de las piezas (denominadores).

Comparar solo el número de piezas que se tienen (numeradores).

Pensar de forma relacional tanto en el tamaño de las piezas como en el número de piezas que se tienen.

Pensar en fracciones equivalentes para comparar

¿Cómo ordenarían los alumnos este conjunto de tarjetas? ¿Cuál de las estrategias anteriores podrían utilizar?



Descripciones de imágenes y figuras

Figura 15.2 • Tabla de Suzanne con las respuestas de los alumnos

Hay 10 respuestas enumeradas de la siguiente manera.

Está en nuestra recta numérica. Fracción inicial 1 sobre 8 Fracción final más fracción inicial 1 sobre 8 Fracción final más fracción inicial 1 sobre 8 Fracción final es igual a fracción inicial 3 sobre 8 fracción final.

Es una fracción. Hay 2 ejemplos.

FractionInicial 2 sobre 8 FractionFinal más FractionInicial 1 sobre 8 FractionFinal es igual a FractionInicial 3 sobre 8 FractionFinal.

FractionInicial 3 sobre 8 FractionFinal multiplicado por 1 es igual a FractionInicial 3 sobre 8 FractionFinal.

Es casi la mitad. Un gráfico circular contiene 8 secciones. 3 de las secciones están sombreadas.

Un rectángulo está dividido en 8 secciones iguales. 3 de las secciones están sombreadas.

3 veces StartFraction 1 sobre 8 EndFraction es igual a StartFraction 3 sobre 8 EndFraction.

StartFraction 4 sobre 8 EndFraction menos StartFraction 1 sobre 8 es igual a StartFraction 3 sobre 8 sobre 8.

FractionInicial 3 sobre 8 FractionFinal no es igual a FractionInicial 3 sobre 6 FractionFinal.

StartFraction 5 sobre 8 EndFraction menos StartFraction 2 sobre 8 EndFraction es igual a StartFraction 3 sobre 8 EndFraction.

FractionInicial 10 sobre 8 FractionFinal menos FractionInicial 7 sobre 8 FractionFinal es igual a FractionInicial 3 sobre 8 FractionFinal.

StartFraction 3 sobre 8 menos StartFraction 3 sobre 8 EndFraction es igual a StartFraction cero sobre 8 EndFraction es igual a cero.

Tabla de ratios

De izquierda a derecha, estas son StartFraction 1 sobre 2 EndFraction, StartFraction 2 sobre 4 EndFraction, StartFraction 4 sobre 8 EndFraction y StartFraction 8 sobre 10 EndFraction. Una nota manuscrita dice lo siguiente. Por lo tanto, StartFraction 1 sobre 2 EndFraction es igual a StartFraction 8 sobre 10 EndFraction.

Juego de cartas

El juego consta de 8 tarjetas etiquetadas con fracciones de diferentes valores.

La pregunta es: ¿Cómo ordenarían los alumnos este juego de cartas? ¿Cuál de las estrategias anteriores podrían utilizar?

Las 8 tarjetas se presentan de la siguiente manera.

Fración inicial $\frac{1}{100}$ Fracción final.

Fración inicial $\frac{3}{5}$ Más de $\frac{5}{7}$ Fracción final.

Fración inicial $\frac{6}{7}$ Más de $\frac{7}{7}$ Fracción final.

StartFraction $\frac{5}{4}$ EndFraction.

StartFraction $\frac{1}{5}$ Más de $\frac{5}{5}$ EndFraction.

1.

Fración inicial $\frac{3}{4}$ Fracción final.

Fración inicial $\frac{1}{2}$ Fracción final.

- Abeel, S. (2005). *Mi decimotercer invierno: una autobiografía*. Scholastic.
- Ahmed, I. y Chao, T. (2018). Tecnologías de aprendizaje asistido para estudiantes con discapacidad visual: una revisión crítica rehumanizadora. *Investigaciones en el aprendizaje de las matemáticas*, 10(3), 173-185. <https://doi.org/10.1080/19477503.2018.1463005>
- Akhavan Tafti, M., Hameedy, M. A. y Mohammadi Baghal, N. (2009). Dislexia, un déficit o una diferencia: comparación de la creatividad y la capacidad de memoria de estudiantes disléxicos y no disléxicos en Irán. *Comportamiento social y personalidad*, 37(8), 1009-1016. <https://doi.org/10.2224/sbp.2009.37.8.1009>
- Alfieri, L., Brooks, P. J., Aldrich, N. J. y Tenenbaum, H. R. (2011). ¿Mejora el aprendizaje la enseñanza basada en el descubrimiento? *Revista de Psicología Educativa*, 103(1), 1-18. <https://doi.org/10.1037/a0021017>
- Amalric, M., D Nghien, I. y Dehaene, S. (2018). Sobre el papel de la experiencia visual en el desarrollo matemático: Evidencia de matemáticos ciegos. *Neurociencia cognitiva del desarrollo*, 30, 314-323. <https://doi.org/10.1016/j.dcn.2017.09.007>
- Annamma, S. A., Ferri, B. A. y Connor, D. J. (2018). Teoría crítica de la discapacidad y la raza: exploración del linaje interseccional, el surgimiento y los posibles futuros de DisCrit en la educación. *Review of Research in Education*, 42(1), 46-71. <https://doi.org/10.3102/0091732X18759041>
- Arnoux, P., Furukado, M., Harriss, E. e Ito, S. (2011). Números algebraicos, automorfismos de grupos libres y sustituciones en el plano. *Transacciones de la Sociedad Matemática Americana*, 363(9), 4651-4699. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-2011-05188-3>
- Arrowsmith-Young, B. (2013). *La mujer que cambió su cerebro: cómo superé mi discapacidad de aprendizaje y otras historias de transformación cognitiva (edición reimpressa)*. Simon & Schuster.
- Artiles, A. J., Harry, B., Reschly, D. J. y Chinn, P. C. (2002). Identificación excesiva de los estudiantes de color en la educación especial: una visión crítica. *Multicultural Perspectives*, 4(1), 3-10. https://doi.org/10.1207/S15327892MCP0401_2
- Ashcraft, M. H. y Moore, A. M. (2009). La ansiedad matemática y la disminución afectiva del rendimiento. *Revista de evaluación psicoeducativa*, 27(3), 197-205.
- Attree, E. A., Turner, M. J. y Cowell, N. (2009). Una prueba de realidad virtual identifica las fortalezas visoespaciales de los adolescentes con dislexia. *Ciberpsicología y comportamiento*, 12(2), 163-168. <https://doi.org/10.1089/cpb.2008.0204>
- Baroody, A. J. (2003). El desarrollo de la experiencia adaptativa y la flexibilidad: la integración del conocimiento conceptual y procedimental. En A. Baroody y A. Dowker (Eds.), *El desarrollo de conceptos y habilidades aritméticas: la construcción de la experiencia adaptativa* (pp. 1-33). Routledge.
- Baroody, A. J., Purpura, D. J., Eiland, M. D. y Reid, E. E. (2015). El impacto de la enseñanza basada en el descubrimiento con orientación alta y mínima en la promoción del aprendizaje de estrategias de razonamiento para combinaciones básicas de suma y dobles. *Early Childhood Research Quarterly*, 30, 93-105. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2014.09.003>
- Bateman, B. D. y Linden, M. A. (2006). *Mejores IEP: cómo desarrollar programas legalmente correctos y educativamente útiles* (J. Donovan y T. Kinney, eds.; 5.^a ed.). IEP Resources, Attainment Company.

Battey, D., Neal, R. A., Leyva, L. y Adams-Wiggins, K. (2016). La interconexión entre las dimensiones relacionales y de contenido de una enseñanza de calidad: relaciones de apoyo entre profesores y alumnos en las aulas de matemáticas de primaria de zonas urbanas. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 1-19.

Bauman, H. D. L. y Murray, J. J. (2014). *Deaf Gain: Raising the stakes for human diversity*. University of Minnesota Press.

Bay-Williams, J. y Kling, G. (2019). *Fluidez matemática: más de 60 juegos y herramientas de evaluación para apoyar el aprendizaje y la retención*. ASCD.

Bellos, A. y Harriss, E. (2015). *Patterns of the universe: A coloring adventure in math and beauty (edición ilustrada)*. The Experiment.

Berry, R. Q. III. (2008). Access to upper-level mathematics: The stories of successful African American middle school boys. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(5), 464-488.

Bibby, T. (2002). Vergüenza: una respuesta emocional al hecho de hacer matemáticas como adulto y como profesor. *Revista Británica de Investigación Educativa*, 28(5), 705-721. <https://doi.org/10.1080/0141192022000015543>

Boaler, J. y Greeno, J. G. (2000). Identidad, agencia y conocimiento en los mundos matemáticos. En J. Boaler (Ed.), *Múltiples perspectivas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 171-200). Ablex.

Boaler, J., y Sengupta-Irving, T. (2016). Los muchos colores del álgebra: el impacto de la enseñanza centrada en la equidad en el aprendizaje y la participación de los estudiantes. *The Journal of Mathematical Behavior*, 41, 179-190. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.10.007>

Bottge, B. A. (1999). Efectos de la enseñanza contextualizada de las matemáticas en la resolución de problemas de los estudiantes con rendimiento medio y por debajo de la media. *Journal of Special Education*, 33(2), 81-92.

Bottge, B. A., Heinrichs, M., Mehta, Z. D. y Ya-Hui Hung. (2002). Sopesar los beneficios de la enseñanza de las matemáticas anclada para los alumnos con discapacidades en las clases de educación general. *Revista de Educación Especial*, 35(4), 186-200.

Bottge, B. A., Ma, X., Gassaway, L., Toland, M. D., Butler, M. y Cho, S. J. (2014). Efectos de los modelos de enseñanza combinados en el rendimiento matemático. *Niños excepcionales*, 80(4), 423-437. <https://doi.org/10.1177/0014402914527240>

Bottge, B. A., Rueda, E., Serlin, R. C., Hung, Y.-H. y Kwon, J. M. (2007). Reducir las diferencias de rendimiento con problemas matemáticos anclados: retos y posibilidades. *Revista de Educación Especial*, 41(1), 31-49.

Bottge, B. A., Stephens, A. C., Rueda, E., LaRoque, P. T. y Grant, T. S. (2010). Anclaje de la resolución de problemas y la enseñanza del cálculo en entornos de aprendizaje ricos en contexto. *Niños excepcionales*, 76(4), 417-437.

Bushart, B. (s. f.). *Problemas verbales sin números*. <https://numberlesswp.com/>

Butterworth, B. (2010). Capacidades numéricas fundamentales y los orígenes de la discalculia. *Tendencias en Ciencias Cognitivas*, 14, 534-541.

Cameron, A. y Fosnot, C. T. (2008). *Las trufas de Muffles: multiplicación y división con matrices (edición ilustrada)*. FirstHand.

Canobi, K. H. (2009). Interacciones entre conceptos y procedimientos en la suma y la resta de los niños. *Revista de Psicología Infantil Experimental*, 102, 131-149. <https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.07.008>

Cantor, P., Osher, D., Berg, J., Steyer, L. y Rose, T. (2019). Maleabilidad, plasticidad e individualidad: cómo aprenden y se desarrollan los niños en contexto1. *Applied Developmental Science*, 23(4), 307-337. <https://doi.org/10.1080/10888691.2017.1398649>

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L. y Empson, S. B. (2015). *Las matemáticas de los niños: enseñanza guiada cognitivamente* (2.^a ed.). Heinemann.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Pensar matemáticamente: integración de la aritmética y el álgebra en la escuela primaria*. Heinemann.

Caruana, V. (2015). Acceso a los estándares básicos comunes para estudiantes con discapacidades de aprendizaje: estrategias para redactar objetivos del IEP basados en los estándares. *Prevención del fracaso escolar: educación alternativa para niños y jóvenes*, 59(4), 237-243. <https://doi.org/10.1080/1045988X.2014.924088>

Codina, C. J., Pascalis, O., Baseler, H. A., Levine, A. T. y Buckley, D. (2017). El tiempo de reacción visual periférica es más rápido en adultos sordos e intérpretes de lengua de signos británica que en adultos oyentes. *Frontiers in Psychology*, 8. <https://www.frontiersin.org/articles/10.3389/fpsyg.2017.00050>

Connor, D. J. (2007). *Narrativas urbanas: Retratos en progreso; la vida en la encrucijada de la discapacidad intelectual, la raza y la clase social*. Peter Lang.

Cortiella, C. y Horowitz, S. H. (2014). El estado de las discapacidades del aprendizaje: hechos, tendencias y cuestiones emergentes. Centro Nacional para las Discapacidades del Aprendizaje. <http://www.hopkintonsepac.org/wp-content/uploads/2015/12/2014-State-of-LD.pdf>

Craig, M., Dewar, M., Turner, G., Collier, T. y Kapur, N. (2022). Evidencia de una codificación superior de los recuerdos visuales detallados en personas sordas que utilizan el lenguaje de signos. *Scientific Reports*, 12(1), artículo 1. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-13000-y>

De Clercq-Quaegebeur, M., Casalis, S., Vilette, B., Lemaitre, M. P. y Vallée, L. (2018). Habilidades aritméticas en niños con dislexia del desarrollo: rendimiento en la prueba francesa ZAREKI-R. *Journal of Learning Disabilities*, 51(3), 236-249. <https://doi.org/10.1177/0022219417690355>

Demirkaya, P. N. y Bakkaloglu, H. (2015). Examen de las relaciones entre alumnos y profesores de niños con y sin necesidades especiales en aulas de preescolar. *Ciencias de la Educación: Teoría y Práctica*, 15(1), artículo 1. <https://doi.org/10.12738/estp.2015.1.2590>

Demir-Lira, Ö. E., Suárez-Pellicioni, M., Binzak, J. V. y Booth, J. R. (2019). Las actitudes hacia las matemáticas están relacionadas de manera diferente con la base neuronal de la multiplicación, dependiendo de la habilidad matemática. *Learning Disability Quarterly*, 43(3), 179-191. <https://doi.org/10.1177/0731948719846608>

Desoete, A., y De Craene, B. (2019). Metacognición y educación matemática: una visión general. *ZDM*, 51(4), 565-575. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01060-w>

Devine, A., Hill, F., Carey, E., & Szűcs, D. (2018). Los problemas matemáticos cognitivos y emocionales se disocian en gran medida: prevalencia de la discalculia del desarrollo y la ansiedad matemática. *Journal of Educational Psychology*, 110(3), 431–444. <https://doi.org/10.1037/edu0000222>

APÉNDICE A: IDEAS FUNDAMENTALES DE MATEMÁTICAS DE K-8 ALINEADAS CON LAS PRÁCTICAS DOCENTES

Idea fundamental (número de página)	Prácticas docentes
Contar (p. 126)	Entrevista individual (cap. 3, pp. 48-49) Contar colecciones (cap. 7, pp. 116-123)
Sentido numérico/valor posicional (p. 119)	Contar colecciones (cap. 7, pp. 116-123) Recuento coral (cap. 7, pp. 115-116) Problemas de CGI (utilizando múltiplos de diez, en particular la división de medidas con decenas) (cap. 8, pp. 127-136, 174-175)
Suma y resta tempranas (p. 138)	Problemas de CGI (todos los tipos de problemas de suma y resta) (cap. 8, págs. 127-136, 138-139)
Fluidez en las operaciones de suma y resta (p. 155)	Cadenas numéricas Rekenrek (capítulo 9, páginas 141-143 y 152) Juegos matemáticos (cap. 10, pp. 170-172)
Suma y resta de números de varios dígitos (p. 156)	Problemas de CGI (con números de varios dígitos) (cap. 8, pp. 127-136, 138-139) Unidad: Medir para la exposición de arte (Fosnot, 2020) (cap. 9, págs. 143-152) Cadenas numéricas (cap. 9, pp. 146-149)
Multiplicación y división tempranas (p. 174)	Tareas de la torre (cap. 10, págs. 159-170) Problemas narrativos CGI para la multiplicación y la división (cap. 10, pp. 174-175)
Fluidez en las operaciones de multiplicación (p. 176)	Juegos matemáticos (cap. 10, págs. 170-172) Secuencias numéricas (cap. 11, pp. 177-186)
Multiplicación y división de números de varios dígitos (p. 190)	Problemas de CGI con multiplicaciones y divisiones (utilizando números de varios dígitos) (cap. 10, págs. 174-175)

	Cadenas numéricas (cap. 11, pp. 177-186)
Equivalencia y ordenación de fracciones (p. 256)	<p>¿Cuál no pertenece? Charla sobre fracciones (cap. 1, pp. 4-5, 256-257)</p> <p>¿Qué sabes sobre [fracciones]? (Cap. 15, págs. 241-242, 256-257)</p> <p>Comparación de fracciones (cap. 15, pp. 256-257)</p> <p>Problemas de CGI sobre reparto equitativo y grupos múltiples (cap. 12, pp. 196-200, 210-211)</p> <p>Cadena de números porcentuales (cap. 11, págs. 186-188)</p>
Operaciones con fracciones (p. 210)	Problemas narrativos CGI sobre reparto equitativo y grupos múltiples (cap. 1, pp. 2-12; cap. 12, pp. 196-200, 210-211)
Pensamiento algebraico (p. 224, p. 240)	<p>Rectas numéricas dobles (Fosnot y Jacob, 2007) (cap. 11, pp. 186-188; cap. 13, pp. 213-219, 224)</p> <p>Tareas de patrones visuales (cap. 4, pp. 52-59; cap. 15, pp. 235, 240)</p> <p>Tarea de medio abierto (cap. 6, pp. 94-96)</p>

APÉNDICE B: BARRERAS Y APOYOS EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS DESDE UNA PERSPECTIVA NEURODIVERSIFICADA

Lee los relatos que aparecen a continuación, escritos por personas con dificultades de aprendizaje (como dislexia o discalculia). Reflexiona sobre las siguientes preguntas:

¿Qué favorece el aprendizaje de las matemáticas en este estudiante?

¿Cuáles son las barreras para el aprendizaje de las matemáticas para este estudiante?

	Relato	¿Qué favorece el aprendizaje de las matemáticas en este estudiante?	¿Cuáles son las barreras para el aprendizaje de las matemáticas para este estudiante?
1	<p>Las matemáticas son «difíciles» porque son aburridas y requieren mucho tiempo. ¡Los deberes suelen consistir en hacer el mismo problema cuarenta veces seguidas! Y al día siguiente, hacemos cuarenta más exactamente iguales, salvo por un dígito más que aumenta la complejidad. Las páginas se suceden, una procesión interminable de papeleo aburrido, una rutina de problemas sin interés... Lo que no consigo entender es que las clases «más difíciles» son aquellas en las que las matemáticas se vuelven mucho más interesantes. En lugar de cuarenta problemas aburridos, te dan cinco interesantes. En lugar de ejercicios sin sentido, puedes empezar a ver cómo utilizar las matemáticas como herramienta. Por fin te dan un montón de tablonos y te dejan empezar a clavar cosas.</p> <p>(Memorias de Shamus Young, 2011, p. 119)</p>		
2	<p>Aprender... simplemente aprender muy rápido. Me lleva tiempo. Podría decirte que me lleva bastante tiempo aprender, especialmente matemáticas. Es mi peor asignatura. Podría llevarme semanas aprender una sola cosa. Hay muchas materias que puedo aprender, pero luego las olvido muy rápido, vuelvo a hacerlo, vuelvo a aprender. Para mí, es solo aprenderlo en ese momento, en una hora, hora y media, la clase que tenemos. Me lleva un par de clases familiarizarme con la materia...</p>		

	<p>Es muy extraño que me etiqueten con una discapacidad de aprendizaje, pero cuando se trata de una asignatura, conecto con las cosas que me interesan porque sé, ya lo sé, sé lo que está pasando, sé lo que ha pasado. Simplemente conecto y soy uno de los principales alumnos que levantan la mano y discuten con los profesores.</p> <p>(Entrevista con Santiago, en Connor, 2007, pp. 205, 209).</p>		
3	<p>Poco después de entrar en cuarto curso, la verdad salió a la luz. Aunque podía recitar los números y las tablas de multiplicar que había memorizado, para mí no eran más que símbolos con nombres numéricos que no significaban nada. No entendía los conceptos que había detrás. Ante la avalancha diaria de conceptos matemáticos cada vez más difíciles, ya no podía negar que había un problema. Empecé a bloquearme por completo. Me sentía incapaz de hacer frente a la situación y, por primera vez, tomé conciencia del hecho de que no entendía las cosas que mis compañeros de clase entendían. Empecé a sentirme cada vez menos cómoda en la escuela. Me angustiaba que alguien descubriera que no podía entenderlo todo. Siempre me sentía más vulnerable durante la parte del día dedicada a las matemáticas.</p> <p>(Memorias de Samantha Abeel, 2005, p. 22)</p>		
4	<p>Si el profesor entraba en el aula gruñendo y recitando datos de forma mecánica, sin explicar el significado fundamental, mis discapacidades se acentuaban y suspendía. Pero en asignaturas como física, biología y álgebra, impartidas con métodos multisensoriales por profesores amables y entusiastas, sacaba notas casi perfectas.</p> <p>(Memorias con el Dr. Abraham Schmitt, 1994, p. 118)</p>		
5	<p>La primera vez que noté que mi cerebro era diferente fue en la escuela primaria. La discalculia no era una condición reconocida en aquella época, al menos no en ninguna de las escuelas a las que asistí. En cuanto se esperaba de mí que separara las ayudas visuales de las matemáticas, se convirtió en un problema para mí. Podía entender las matemáticas cuando veía las cosas que había que contar, incluso mis dedos. Al eliminar esto, se rompió mi frágil relación con las matemáticas. Nadie entendía por qué</p>		

	no podía comprender estos conceptos supuestamente sencillos. Mi recuerdo de esa época es que había muchos profesores que simplemente no entendían por qué podía destacar en ciertas materias y suspender estrepitosamente en todo lo relacionado con las matemáticas. (Blog de LozMac, 2018)		
6	En octavo curso, había aprendido los procedimientos matemáticos correctos, pero aún necesitaba tiempo extra. En esa clase hacíamos «matemáticas rápidas», lo que me provocaba una ansiedad terrible y por lo que haría casi cualquier cosa para evitarlo. La tarea de este ejercicio consistía en completar una página entera de cálculos en cinco minutos. Me llevaba el libro a casa a escondidas la noche anterior, respondía a todas las preguntas y luego escribía las respuestas en mi libro con lápiz; al día siguiente, en clase, solo tenía que copiar mis respuestas. Era la única forma en que podía completar el ejercicio en el tiempo asignado. Aunque había hecho el trabajo (en casa), me sentía como una impostora. (Memorias de Barbara Arrowsmith-Young, 2013, p. 21)		
7	Una de las ventajas [del LD] era que comprendía mejor desde muy joven mis limitaciones y debilidades. Aunque esto pueda no parecer una gran ventaja, hay que recordar que todas las personas tienen sus propias debilidades y limitaciones. Por ejemplo, me di cuenta de que, para superar las matemáticas, debía dibujar los problemas. Este sistema me permitía visualizar lo que estaba tratando de hacer. (Garret Day, en Rodis et al., 2001, p. 99)		

Memorias escritas por y con personas con dificultades de aprendizaje/dislexia/discalculia:

Abeel, S. (2005). Mi decimotercer invierno: una memoria. Scholastic.

Arrowsmith-Young, B. (2013). La mujer que cambió su cerebro: Cómo superé mi discapacidad de aprendizaje y otras historias de transformación cognitiva (reedición). Simon & Schuster.

Schmitt, A., (1994). Brillante idiota: autobiografía de un disléxico. Good Books.

Young, S. (2011). Cómo aprendí. CreateSpace Independent Publishing Platform.

Colecciones de relatos escritos por personas con dificultades de aprendizaje:

Connor, D. J. (2007). Narrativas urbanas: Retratos en progreso; la vida en la encrucijada de la discapacidad de aprendizaje, la raza y la clase social. Peter Lang.

Rodis, P., Garrod, A. y Boscardin, M. L. (2001). Learning disabilities and life stories. Allyn and Bacon.

Entradas de blog:

LozMac (8 de enero de 2018). Chico inteligente y gordito: vivir con discalculia. OxGadgets.
<https://www.oxgadgets.com/2018/01/living-with-dyscalculia.html>